ESERCIZI SUL PRINCIPIO DI INDUZIONE

Ricordiamo l'enunciato del principio di induzione: Sia $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di proposizioni. Se :
(i) P_1 é vera;
(ii) $P_k \Rightarrow P_{k+1} \quad \forall k \in \mathbb{N}$,
Allora P_n é vera $\forall n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 1
Dimostrare per induzione le seguenti uguaglianze e disuguaglianze:
(a) $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$

(b) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

(c) se $a \geq -1,\ (1+a)^n \geq 1 + na$ (disuguaglianza di Bernoulli)

$(d) n! \geq 2^{n-1}$

(e) se $a \neq 1, \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$

Esercizio 2
Se $x \geq 1$, usando la disuguaglianza di Bernoulli, dimostrare che

$$x^{\frac{1}{n}} - 1 \leq \frac{x-1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Esercizio 3
Dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N}$ il numero $n + n^2$ é pari.

Esercizio 4
Dimostrare che

$$x^{2n} + x^{2n-1} + ... + x^2 + x + 1 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$$

Esercizio 5
Sia

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Dimostrare che $S_{2^n} \geq \frac{n}{2}$.