II tutorato di analisi matematica 1a

docenti: prof. M. Girardi, prof. P. Magrone

7 ottobre 2004

Esercizio 1. Dimostrare che:
$||a| - |b|| \leq |a - b| \leq |a| + |b|$

Esercizio 2. Dimostrare che, se a, b, $c \in \mathbb{R}^+$, risulta:

a) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$

b) $(a + b)(b + c)(a + c) \geq 8abc$

c) $a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 \geq abc(a + b + c)$

Esercizio 3. Dire per quali $x \in R$ sono soddisfatte le seguenti disuguaglianze:

1. con i moduli

   (a) $|x^2 - 3x + 2| < x + 1$

   (b) $\left|\frac{|x+1|+3}{|2x|+1}\right| \leq 4$

   (c) $|2\tan^2 x - \tan x| < 2$

   (d) $|\sqrt{3}\sin x - \cos x| \leq 1$

2. trigonometriche

   (a) $\frac{\sin x - \cos x}{4\sin x + 9} \geq 0$

   (b) $\cos(2x) + \cos(x) < 0$

   (c) $\sqrt{3}\sin x - \cos x + 1 < 0$

   (d) $(4 - \sqrt{6})\sin^2 x - \sqrt{6}\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x > 2\sqrt{2}\sin x$

   (e) $4\sin x \tan x - \frac{3}{\cos x} < 0$

3. esponenziali

   (a) $3^x - 5 \cdot 3^{1-x} \leq 2$

   (b) $3^{x-1} > \frac{4^{x+1}}{5}$

4. logaritmiche

   (a) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1) > 0$
   (b) $\log x + log(x + 3) < 1$
   (c) $2\log_{0,7}(x + 1) - \log_{0,7}(x - 1) > \log_{0,7}(3x - 1)$
   (d) $\log_{\frac{1}{2}}(7 - 2^x) - \log_{\frac{1}{2}}(5 + 4^x) + \log_{\frac{1}{2}} 7 \geq 0$

5. ...per concludere

   (a) $|\cos x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$
   (b) $|\log_9(2x^2 - x + 1) - \log_3(x - 2)| \leq 1$
   (c) $\log_2(2\sin^2 x - \sin x + 3) > 2$
   (d) $2\log_{\frac{1}{2}} \tan x \leq \log_{\frac{1}{2}} 3$

Esercizio 4. Dimostrare che $\sqrt{3}$ non è un numero razionale.