I tutorato di analisi matematica 1a

docenti: prof. M. Girardi, prof. P. Magrone

30 settembre 2004

Esercizio 1. Siano A e B i seguenti insiemi. Si trovi $A \cup B \quad A \cap B \quad A \setminus B$ e si indichi se i risultanti sono insiemi aperti, chiusi o nessuno dei due:
$a)$ $A = (0,2) \quad B = (1,3)$ $\qquad b)$ $A = (-\infty, 3] \quad B = (-\infty, 1)$
$c)$ $A = [-1,0] \quad B = (0,1]$ $\qquad d)$ $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 > 4\} \quad B = (1,3)$

Esercizio 2. Dire, verificandone le propietà, quali delle seguenti sono relazioni di equivalenza in $\mathbb{R}$:
$a)$ $x \leq y$ $\qquad b)$ $x + y$ è intero
$c)$ $|x| = |y|$ $\qquad d)$ $x(1-y^2) = y(1-x^2)$

Esercizio 3. Verificare se le seguenti sono relazioni di equivalenza e per ogni $a \in \mathbb{R}$ trovare la classe di a, $[a]$:
$a)$ $x = y$ $\qquad b)$ $x^2 + y^2 \geq 6$ $\qquad c)$ $x^2 + y^2 \geq 0$
$d)$ $|x - y| \leq 12$ $\qquad e)$ $\cos x = \cos y$ $\qquad e)$ $|\sin y| = \frac{1}{|x|+1}$

Esercizio 4. Dire quale tra le seguenti è una partizione giustificando la risposta:
a) il parallelismo tra rette in un piano
b) sia $a \in \mathbb{R}$, $|x| \geq a \quad x \in [-a, a]$
c) in $\mathbb{N}$: $\{i\, numeri\, primi\} \quad \{i\, numeri\, pari\} \setminus \{2\}$
d) in $\mathbb{R}$ $\{2\}$, $\{x > 2\}$, $\{[-3, 2)\}$, $\{x < -3\}$

Esercizio 5. Dimostrare le seguenti uguaglianze:
$a)$ $|ab| = |a||b|$ $\qquad b)$ $\sqrt{a^2} = |a|$ $\qquad c)$ $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

Esercizio 6. Si consideri l'equazione $\sqrt{5-x} = 1 + \sqrt{x}$. Elevando al quadrato entrambi i membri si ottiene $5 - x = 1 + 2\sqrt{x} + x$ cioé $2 - x = \sqrt{x}$. Elevando nuovamente al quadrato si ottiene l'equazione $x^2 - 5x + 4 = 0$ che ha soluzioni $x = 4$ e $x = 1$. Sostituendo quindi $x = 4$ nell'equazione di partenza si ha $1 = 3$. Cos'è che non va?

Esercizio 7. Trovare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni trigonometriche:
$a)$ $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad b)$ $2 \sin x = \sqrt{2} \cos x$ $\qquad c)$ $\sin x \cos x = \frac{\tan x}{4}$
$d)$ $\sin^2 x + 2\cos^2 x - \frac{3}{4} = 0$ $\qquad e)$ $\cos 2x - \cos^2 x = \tan^2 x$

Esercizio 8. Stabilire per quali valori del parametro reale k ha significato ciascuna espressione dove α è un angolo del IV quadrante:

a) $\cos\beta = 1 - \frac{1}{k^2}$ b) $\tan\alpha = k^2 - k$

Esercizio 9. Semplifica, motivando i passaggi, le seguenti espressioni:

a) $\left[\frac{1}{\cos(-\alpha)} + \frac{cos(\pi-\alpha)}{1-\sin(2\pi-\alpha)}\right]\tan(\pi+\alpha)$

b) $\frac{\tan(\frac{7}{4}\pi)}{cos(\frac{5}{3}\pi)} - \frac{\cos\frac{3}{4}\pi}{\sin\frac{7}{6}\pi} + 2\sin(\frac{3}{4}\pi)\cos(-\frac{\pi}{4}) - \sin\frac{3}{2}\pi$