IV tutorato di analisi matematica 1a

docenti: prof. M. Girardi, prof. P. Magrone

21 ottobre 2004

Esercizio 1. Provare che 2 è un minorante e 6 un maggiorante del seguente insieme:
$A = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{5n-1}{2n-1}, n \in \mathbb{N}\}$

Esercizio 2. Dato $A = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{2n-1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ trovare estremo superiore ed estremo inferiore di A motivando le risposte verificandole attraverso la caratterizzazione.

Esercizio 3. Trovare, qualora esistano, estremo superiore e inferiore dei seguenti insiemi e dire se sono rispettivamente un massimo e un minimo per lo stesso insieme. Motivare le risposte verificandole attraverso la caratterizzazione.

a) $E = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{2n-1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$

b) $E = \{x \in [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}] : x = \frac{m}{2^n}, n, m \in \mathbb{N}\}$

c) $E = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{3n-2}{2n}, n \in \mathbb{N}\}$

d) $E = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}\}$

Esercizio 4. Dato l'insieme $A = \{a_n \in \mathbb{R} : a_n = (-1)^n \frac{n}{n+3}, n \in \mathbb{N}\}$ determinare, sup A, inf A.

Esercizio 5. Dimostrare che dati due insiemi qualunque $\emptyset \neq X,\ Y,\ Y \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$, si ha

$$\inf X \leq \inf Y \leq \sup Y \leq \sup X.$$

Esercizio 6. Dimostrare che dati due insiemi qualunque $\emptyset \neq X,\ Y$, se $X + Y := \{x + y, x \in X,\ y \in Y\}$, si ha:

$$\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y$$

Esercizio 7. Sia $X \in \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$ e sia $tX := \{tx :\ x \in X,\ t \in \mathbb{R}^+\}$, allora si ha

$$\sup(tX) = t \sup X$$

Esercizio 8. Dimostrare che un insieme $X \in \mathbb{R}$ e' limitato $\Longleftrightarrow$ esiste un numero reale $M > 0$ tale che $|x| < M,\ \forall x \in X$.