

SIMULAZIONE DEL SECONDO ESONERO DI AM1

Esercizio 1.

Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{n} \right)^n \cdot n \sin \left(\frac{3}{2n} \right); \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \arctan \left(\frac{\log \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{\frac{1}{n}} \right)$$

Esercizio 2.

Studiare il comportamento delle seguenti serie al variare del parametro reale x

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{(x+1)^2}{\log k^2} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2 \sin x + 1}{2} \right)^{n+3}$$

Esercizio 3.

Calcolare massimo e minimo limite della seguente successione. Giustificare le risposte usando la caratterizzazione di massimo e minimo limite

$$a_n = \cos(n\pi) \frac{2}{\pi} \arctan n$$

Esercizio 4.

Dimostrare usando la definizione di limite che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{3n^2 + n - 2} \rightarrow \frac{1}{3}$$

Esercizio 5.

Dimostrare i seguenti teoremi:

Theorem 0.0 *Sia a_n una successione a termini positivi.*

Supponiamo che esista il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$$

Allora si ha:

$$l < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$$

$$l > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n > +\infty.$$

Theorem 0.1 Siano a_n, b_n, c_n tre successioni tali che

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$, allora anche la successione b_n tende a l .