SIMULAZIONE DEL PRIMO ESONERO DI AM1

Esercizio 1.

Stabilire se le seguenti sono relazioni di equivalenza (giustificando le risposte):

(i) $x \ R \ y \Leftrightarrow xy \geq 0, x, y \in \mathbf{R}$

(ii) $x \ R \ y \Leftrightarrow x - y = 2k, \ k \in \mathbf{Z}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}$

In $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^*$, dove $\mathbf{Z}^* = \mathbf{Z} \setminus \{\mathbf{0}\}$,

(iii) $(m, n) \ R \ (m', n') \Leftrightarrow mn' = nm'$

Esercizio 2.

Trovare estremo superiore ed inferiore del seguente insieme:

$$A := \{x = 1 - \log \frac{1}{n}, \ n \in \mathbf{N} \setminus \{\mathbf{0}\}\}$$

specificare se si tratta di massimo e minimo. Giustificare le risposte usando la caratterizzazione degli estremi.

Esercizio 3.

Dato l'insieme

$$B = \{x = \frac{n-1}{n^2+1}, \ n \in \mathbf{N}\}$$

trovarne gli eventuali punti di accumulazione. Stabilire se $x = \frac{9}{101}$ é un punto isolato. Giustificare tutte le risposte.

Esercizio 4.

Dimostrare la seguente uguaglianza per induzione:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k - 1) = n^2$$

Esercizio 5.
Dimostrare i seguenti teoremi:

Theorem 0.0 *Dati comunque due numeri reali* a, b, *con* $a < b$, *esiste sempre un numero razionale* r *compreso tra* a *e* b.

Dando per buono il seguente Teorema (permanenza del segno per polinomi):

Theorem 0.1 *Sia* $P(x)$ *un polinomio a coefficienti reali. Se per un certo* $x_0 \in \mathbb{R}$ *risulta* $P(x_0) > 0$, *allora esiste un intorno* $I(x_0, r), r > 0$ *tale che* $\forall x \in I(x_0, r),\ P(x) > 0$.

Dimostrare il Teorema degli zeri per polinomi, ovvero:

Theorem 0.2 *Sia* $P(x)$ *un polinomio a coefficienti reali, siano* $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$. *Se* $P(x_1) < 0$ *e* $P(x_2) > 0$, *allora esiste* $c \in (x_1, x_2)$ *tale che* $P(c) = 0$.