Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di AM1 - A.A. 2006/2007
Tutore: Dott. Nazareno Maroni

Soluzioni del tutorato n.7 del 24/11/2006

Esercizio 1. Verificare, usando la definizione, che:

1) $\left|\frac{n^2+\log n}{n^2+1}-1\right| < \left|\frac{n^2+\log n}{n^2}-1\right| = \frac{\log n}{n^2} < \frac{1}{n} < \epsilon$ se $n > \frac{1}{\epsilon}$.

2) $\frac{n^2-\log n}{\log n-\sin n} > \frac{n^2-n}{n+1} > M$ se $n > \frac{1+M+\sqrt{(1+M)^2+4M}}{2}$.

3) $\left|\sqrt{\frac{n^2-\sin n}{3n^2+\log n}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right| = \frac{\left|\frac{n^2-\sin n}{3n^2+\log n}-\frac{1}{3}\right|}{\sqrt{\frac{n^2-\sin n}{3n^2+\log n}}+\frac{1}{\sqrt{3}}} < \frac{\left|\frac{\log n+3\sin n}{9n^2+3\log n}\right|}{\sqrt{\frac{n^2-1}{3n^2+n}}} < \frac{\frac{n+3}{9n^2}}{\sqrt{\frac{n^2-1}{4n^2}}} < \frac{n+3}{n\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{(n+3)^2}{n^3}} < \sqrt{\epsilon}$

se $\frac{(n+3)^2}{n^3} < \epsilon$, ovvero $\frac{n^2+6n+9}{n^3} \overset{(*)}{<} \frac{2n^2}{n^3} = \frac{2}{n} < \epsilon$ se $n > \frac{2}{\epsilon}$, $(*)$ è vero se $n > 8$, quindi $n > \max\left\{8, \frac{2}{\epsilon}\right\}$.

Esercizio 2. Calcolare usando il teorema dei carabinieri:

1) Abbiamo $0 < \frac{\log n}{n^2} < \frac{1}{n}$, la successione $a_n = 0$ ha come limite 0, anche la successione $c_n = \frac{1}{n}$ ha come limite 0, quindi $\lim_{n\to+\infty}\frac{\log n}{n^2} = 0$.

2) Abbiamo $\frac{n}{n-2} < \frac{\sqrt{n^2+1}}{n-2} < \frac{n^2+1}{n^2-2n}$, la successione di sinistra ha limite 1, anche la successione di destra ha limite 1, quindi $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n-2} = 1$.

3) Abbiamo $\frac{n^2\log n}{n^2+1} = \frac{\log n}{1+\frac{1}{n^2}} > \frac{\log n}{2}$ per $n > 2$, questa successione ha come limite $+\infty$, quindi $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\log n}{n^2+1} = +\infty$.

4) Abbiamo $0 < \frac{n\log n}{n^2+1} < \frac{\sqrt{n}}{n+\frac{1}{n}}$ per n grande, la successione di destra ha limite 0, quindi $\lim_{n\to+\infty}\frac{n\log n}{n^2+1} = 0$.

5) Abbiamo $\frac{2-n^2}{n+1} < \frac{2-n^2}{n}$, questa ha limite $-\infty$, quindi $\lim_{n\to+\infty}\frac{2-n^2}{n+1} = -\infty$.

Esercizio 3. Indichiamo con $[a]$ la parte intera di a. Se si pone $\sqrt{A} = 1+h$ si ha $\sqrt{A^{a_n}} = (1+h)^{a_n} \geqslant (1+h)^{[a_n]} \geqslant 1+h[a_n] \geqslant h[a_n]$ e $A^{a_n} \geqslant h^2[a_n]^2$. Quindi $0 \leqslant \frac{a_n}{A^{a_n}} \leqslant \frac{a_n}{h^2[a_n]^2} \leqslant \frac{[a_n]+1}{h^2[a_n]^2}$, quindi per il teorema dei carabinieri, poiché l'ultima successione tende a 0, si ha l'asserto.
Per quanto riguarda $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n^\beta}{A^{a_n}}$, si ha che $\frac{a_n^k}{A^{a_n}} = \left(\frac{a_n}{\sqrt[k]{A}}\right)^k$ e quindi se k è un intero e $A > 1$ si ha $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n^k}{A^{a_n}} = 0$. Poi se $\beta \in \mathbb{R}$ è $a_n^{[\beta]} \leqslant a_n^\beta \leqslant a_n^{[\beta]+1}$ e quindi $\frac{a_n^{[\beta]}}{A^{a_n}} \leqslant \frac{a_n^\beta}{A^{a_n}} \leqslant \frac{a_n^{[\beta]+1}}{A^{a_n}}$, dal teorema dei carabinieri segue che $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n^\beta}{A^{a_n}} = 0$.
Per quanto riguarda $\lim_{n\to+\infty}\frac{\log n}{n^\alpha}$: sia B la base del logaritmo e supponiamo che sia $B > 1$. Ponendo $a_n = \log n$ si ha $n^\alpha = B^{\alpha a_n}$ e applichiamo il limite precedente con $A = B^\alpha > 1$. Si ha lo stesso risultato se $0 < B < 1$ poiché $\log_B x = -\log_{\frac{1}{B}} x$.

Esercizio 4. Calcolare i seguenti limiti:

1) Si ha $-\frac{1}{n} \leqslant \frac{\sin n}{n} \leqslant \frac{1}{n}$, quindi per i carabinieri si ha $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$.

2) Utilizzate le formule di duplicazione per il coseno ed utilizzate il limite notevole $\lim_{n\to+\infty} n \sin\frac{1}{n} = 0$, si ha che $\lim_{n\to+\infty} n^2 \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$.

3) Moltiplicate numeratore e denominatore per $\sqrt{n^2-4n} + \sqrt{n^3-3}$. Si ha che $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2-4n}-\sqrt{n^3-3}}{n^2+1} = 0$.

4) Mettete in evidenza al denominatore 4^n. Si ha che $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{3^n-2^{2n}} = 0$.

5) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n!} = 0$.

6) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2^n-3^n} = 0$.

7) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{20}+4n^4+1}{n!} = 0$.

8) $\lim_{n\to+\infty} n \left(\sqrt{\frac{n^2+2}{n^2}} - \sqrt{\frac{n-4}{n}}\right) = 2$.

9) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

10) Si ha $-\frac{n!}{n^n} \leqslant (-1)^n \frac{n!}{n^n} \leqslant \frac{n!}{n^n}$, per i carabinieri $\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{n!}{n^n} = 0$.

11) $\left(n^{\sqrt{n}} - 2^n\right) = 2^n \left(\frac{n^{\sqrt{n}}}{2^n} - 1\right)$, sappiamo che $\frac{n}{2^{\sqrt{n}}} < \frac{1}{M}$ se $n > \bar{n}$ e quindi $2^n \left(\frac{n^{\sqrt{n}}}{2^n} - 1\right) < 2^n \left(\frac{1}{M^{\sqrt{n}}} - 1\right)$ per $n > \bar{n}$ e poiché quest'ultima successione tende a $-\infty$ si ha $\lim_{n\to+\infty} \left(n^{\sqrt{n}} - 2^n\right) = -\infty$.

12) Abbiamo che $\frac{1}{\frac{\log 2}{3\log n}+1} = \frac{\log n^3}{\log 2n^3} < \frac{\log n^3}{\log(n^3+3n^2)} < \frac{3\log n}{3\log n} = 1$, poiché la prima successione tende a 1, per i carabinieri $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n^3}{\log(n^3+3n^2)} = 1$.