Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di AM1 - A.A. 2006/2007
Tutore: Dott. Nazareno Maroni

Soluzioni del tutorato n.6 del 17/11/2006

Esercizio 1. Verificare, usando la definizione, che:

1) Dobbiamo verificare che $\forall\,\epsilon > 0\ \exists\,\nu \in \mathbb{R}:\ \forall\, n > \nu\ \left|\frac{c}{n} - L\right| = \left|\frac{c}{n}\right| < \epsilon$ e ciò si verifica non appena $n > \frac{|c|}{\epsilon}$.

2) Si verifica in maniera analoga ad 1).

3) Abbiamo, moltiplicando e dividendo per $n + \sqrt{n^2-1}$, che $\left|n - \sqrt{n^2-1}\right| = \frac{1}{n+\sqrt{n^2-1}} < \frac{1}{n} < \epsilon$ se $n > \frac{1}{\epsilon}$.

4) $\left|\frac{n^2+4}{2n^2+3} - \frac{1}{2}\right| = \frac{5}{4n^2+6} < \frac{5}{n} < \epsilon$ se $n > \frac{5}{\epsilon}$.

5) Si verifica come in 4).

6) Come in 4) trattando $\sin n$ e $\cos n$ in maniera opportuna.

7) Mettendo in evidenza $\sqrt{n}$ si ha: $3\sqrt{n} - 4n = \sqrt{n}(3 - 4\sqrt{n}) \leqslant -\sqrt{n} < M,\ M < 0$ (infatti se $M > 0$ la relazione è vera $\forall\, n$) se $n > M^2$.

8) Si ha: $n^2 - n\sin n \geqslant n^2 - n > n$ se $n > 2$, quindi è $n^2 - n\sin n > M$ se $n > \max\{2, M\}$.

9) Si ha: $\log_\alpha\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0$ e quindi $\log_\alpha\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \epsilon \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n} < \alpha^\epsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\alpha^\epsilon - 1}$.

10) Abbiamo che $\log n < n$ e quindi $n^2 - \log n > n^2 - n > n$ se $n > 2$, quindi è $n^2 - \log n > M$ se $n > \max\{2, M\}$.

Esercizio 2. Calcolare i seguenti limiti:

1) Dividiamo numeratore e denominatore per la potenza di n più grande presente nella successione, in questo caso dividiamo per n^2, otteniamo: $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2-3n+2}{n+5} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}} = +\infty$, poiché al numeratore abbiamo la successione $2 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}$ che sappiamo tendere a 2 (il limite della somma è uguale alla somma dei limiti), mentre al denominatore abbiamo la successione $\frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}$ che tende a 0, quindi il rapporto tende a $+\infty$.

2) Si procede analogamente e si trova che $\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2+1}{2n^3-3n} = 0$.

3) Si procede come sopra e si trova che $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-2n+3}{3n^2-1} = \frac{1}{3}$.