**Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica**
**Tutorato di AM1 - A.A. 2006/2007**
**Tutore: Dott. Nazareno Maroni**

Soluzioni del tutorato n.1 del 29/09/2006

1. Numeriche intere:
   a) Quella che abbiamo è una disequazione di secondo grado nell'incognita $x$. Troviamo gli zeri del polinomio, essi sono: $x_1 = -90,\ x_2 = 0$, studiando il segno si trova che il polinomio è positivo nell'insieme $\{x \in \mathbb{R} | x \leq -90 \vee\ x \geq 0\}$.
   b) Si procede in maniera analoga, trovando che il polinomio di secondo grado è sempre positivo e quindi $\nexists\ x \in \mathbb{R}$ che soddisfa la disequazione.
   c) $\{x \in \mathbb{R} | x < -5\ \vee\ x > 0\}$.
   d) $\{x \in \mathbb{R} | -2 < x < 0\}$.
   e) $\left\{x \in \mathbb{R} | x < \frac{a-3}{a+3}\ \vee\ x > 1\right\}$, notare che $\frac{a-3}{a+3} < 1\ \forall a > -3$.
2. Frazionarie:
   a) Studiamo la positività del numeratore e del denominatore traendo poi le conclusioni trovando gli intervalli in cui sono entrambi positivi o entrambi negativi (nella disequazione c'è $>$, altrimenti avremmo dovuto trovare intervalli in cui numeratore e denominatore avevano segno opposto). Il denominatore **DEVE** essere $\neq 0$. Dobbiamo quindi studiare due disequazioni. La soluzione è: $\left\{x \in \mathbb{R} | x < -2\ \vee\ -\frac{2}{5} < x < \frac{1}{3}\ \vee\ x > 1\right\}$.
   b) Portiamo il secondo membro a sinistra e facciamo il minimo comune multiplo: ovviamente non possiamo semplificare il denominatore e dobbiamo tenerne conto nell'analisi della disequazione fratta, procediamo come sopra. La soluzione è: $\{x \in \mathbb{R} | x < 1\ \wedge\ x \neq -1\ \vee\ x > 2\}$.
   c) $\{x \in \mathbb{R} | -3 < x < -1\ \vee\ 1 < x < 2\}$.
   d) $\left\{x \in \mathbb{R} | -\sqrt{10} < x < 2\ \vee\ x > \sqrt{10}\right\}$.
   e) $\left\{x \in \mathbb{R} | 0 < x < \frac{1}{3}\ \vee\ x > 1\ \wedge\ x \neq 2\right\}$.
   f) $\begin{cases} a > 0: & x < -2a\ \vee\ -a \leq x \leq \frac{8}{11}a \\ a = 0: & \forall x \neq 0 \\ a < 0: & x < a\ \vee\ \frac{8}{11}a \leq x \leq -a\ \vee\ x > -2a \end{cases}$
   g) Bisogna prestare attenzione all'esistenza delle radici. $\{x \in \mathbb{R} | -1 \leq x \leq 0\}$.
3. Moduli:
   a) Si discutono separatamente i casi in cui la funzione all'interno del modulo sia positiva o negativa. In questo caso abbiamo due moduli e dobbiamo trovare gli intervalli in cui le funzioni siano positive e quelli in cui siano negative. $x - 4 \geq 0$ se $x \geq 4$, $x - 3 \geq 0$ (possiamo però notare subito che per $x = 3$ il denominatore della seconda frazione si annulla, questo implica che si dovrà imporre $x \neq 3$) se $x \geq 3$, quindi:
      (i) $x \geq 4$ le funzioni sono entrambe positive e possiamo togliere entrambi i moduli senza dover cambiare segno. Abbiamo ora una disequazione

frazionaria la cui soluzione è $3 < x < 5$, **MA** dobbiamo ricordarci che ci troviamo nel caso $x \geq 4$ per cui l'intervallo si restringe a $4 \leq x < 5$.

(ii) $3 < x < 4$, risolta la disequazione e fatte le dovute osservazioni la soluzione è $\frac{8+\sqrt{13}}{3} < x < 4$.

(iii) $x < 3$, $\nexists x < 3$ che verifica la disequazione.

Per cui la soluzione è: $\left\{x \in \mathbb{R} | \frac{8+\sqrt{13}}{3} < x < 5\right\}$.

b) $\left\{x \in \mathbb{R} | -1 < x < 3 - \sqrt{10} \ \vee \ x > 1\right\}$.

c) $\left\{x \in \mathbb{R} | x > \frac{1}{2} \ \wedge \ x \neq 1\right\}$.

d) $\left\{x \in \mathbb{R} | \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < x < -1 \ \vee \ x > 1\right\}$.

4. Logaritmiche e esponenziali:

a) Poiché c'è una radice dobbiamo assicurarci che il radicando sia $\geq 0$, deve quindi essere $x \geq 0$; c'è un logaritmo e l'argomento deve essere **strettamente positivo**, ovvero $x + 1 > 0$ e quindi $x > -1$ e poiché il logaritmo è al denominatore deve essere $\neq 0$ che implica $x \neq 0$; mettendo insieme tutte le condizioni abbiamo che necessariamente $x > 0$. Ora andiamo ad analizzare la disequazione: dobbiamo discutere la positività del numeratore e del denominatore. Per quanto riguarda il numeratore possiamo notare che è strettamente positivo per $x > 0$, basta vedere, quindi, dove il denominatore è strettamente positivo: $x > 0$. La soluzione è quindi: $\{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$.

b) Va prestata attenzione all'esistenza della radice e del logaritmo stesso: la radice non ha problemi ma l'argomento del logaritmo è una frazione, così come la disequazione stessa. $\nexists x \in \mathbb{R}$ che soddisfa la disequazione.

c) Possiamo rendere il logaritmo naturale al denominatore in base 2, dobbiamo controllare il dominio di esistenza di ogni logaritmo e studiamo la positività di numeratore e denominatore. Per $x > 1 \ \wedge \ x \neq 2$ il membro di sinistra è $> 0$, quindi $\nexists x \in \mathbb{R}$.

d) Eleviamo entrambi i membri con base $\frac{1}{3}$ prestando attenzione al fatto che la base della potenza è un numero $< 1$, svolgendo otteniamo una disequazione numerica intera e si vede che $\nexists x \in \mathbb{R}$.

e) $\left\{x \in \mathbb{R} | x \geq \frac{\log \frac{3\sqrt{5}}{16}}{\log 6}\right\}$.

5. Trigonometriche:

a) Studiamo la positività del numeratore: $\sin x \geq 0 \Leftrightarrow 0 + 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$; analizziamo ora il denominatore utilizzando la circonferenza goniometrica: si trova che $\sin x > \cos x \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{5}{4}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$; quindi la soluzione è:
$\left\{x \in \mathbb{R} | \frac{\pi}{4} + 2k\pi < x \leq \pi + 2k\pi \ \vee \ \frac{5}{4}\pi + 2k\pi < x \leq 2\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

b) $\nexists x \in \mathbb{R}$ che soddisfa la disequazione.

c) $\left\{x \in \mathbb{R} | \frac{\pi}{4} + 2k\pi < x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ \vee \ \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x \leq \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup$
$\left\{x \in \mathbb{R} | \frac{5}{4}\pi + 2k\pi < x < \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \ \vee \ \frac{5}{3}\pi + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.