Cognome e nome ____________________

PRIMO ESONERO DI AM1
8 NOVEMBRE 2006

Esercizio 1.
Dato l'insieme

$$A = (-\infty, \frac{1}{3}) \cap [0, \frac{1}{2}) \setminus \{0\}$$

stabilire se é aperto o chiuso. L'insieme é l'intervallo $(0, \frac{1}{3})$, che risulta aperto. $\forall x \in A$ scegliendo $r < \min\{|x|, |x-\frac{1}{3}|\}$ l'intorno $I(x, r)$ é tutto contenuto in A.

Dato l'insieme

$$B = \left\{1 - \frac{1}{n},\ n = 1, 2, 3, ..., 100\right\}$$

stabilire se é aperto o chiuso. L'insieme é chiuso perché unione di 100 punti e i punti sono chiusi, l'unione finita di chiusi é un chiuso.

Esercizio 2.

Dato l'insieme

$$C = \left\{x = e^{-\frac{1}{n}},\ n \in \mathbf{N},\ \mathbf{n \neq 0}\right\}$$

trovare estremo inferiore e superiore.

Per $n = 1$ si ottiene e^{-1}, che é un minorante (quindi minimo), infatti:

$$e^{-\frac{1}{n}} \geq e^{-1} \Leftrightarrow -\frac{1}{n} \geq -1 \Leftrightarrow \frac{1}{n} \leq 1.$$

Dimostriamo adesso che 1 é un maggiorante:

$$e^{-\frac{1}{n}} \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{n} \leq 0.$$

Manca da provare che 1 é il piú piccolo dei maggioranti:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \overline{n} : e^{-\frac{1}{\overline{n}}} > 1 - \varepsilon$$

verificato per $n \geq \frac{1}{log(1-\varepsilon)}$.

Esercizio 3.

Dimostrare per induzione:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} \cdots \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Base induttiva : $n = 1$.

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Passo induttivo: supponiamo per ipotesi che

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

e dimostriamo che

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Infatti si ha:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Esercizio 4.

Troare i punti di accumulazione dell'insieme:

$$C = \left\{ x = \frac{2(-1)^n - 1}{2n+1} n \in \mathbf{N} \right\}$$

Il punto di accumulazione é zero, infatti $\forall\varepsilon > 0 \exists\overline{n}$:

$$\left|\frac{2(-1)^n - 1}{2n+1}\right| < \left|\frac{3}{2n+1}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 2n + 1 > \frac{3}{\varepsilon}\ \Leftrightarrow\ n > \frac{1}{2}\left(\frac{3}{\varepsilon} - 1\right)$$

Esercizio 5.

Dimostrare i teoremi: esistenza dell'estremo superiore, proprietá di Archimede (per la risposta vedere un qualunque libro di analisi)