Am1c – Soluzioni Tutorato III

Derivate

Venerdì 10 Marzo 2006

Filippo Cavallari, Fabio Pusateri

Esercizio 1

- $y = |x|$
- $y = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$
- $y = \sqrt[3]{x}$
- $y = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$
- $y = \begin{cases} x+1 & x \geq 0 \\ x & x < 0 \end{cases}$

  Infatti tale condizione è necessaria ma non sufficiente affinché la funzione sia derivabile nell'origine.

Esercizio 2 Dall'ipotesi si ricava che $|f(x) - f(y)| \leq (x-y)^2 \Rightarrow 0 \leq \left|\dfrac{f(x) - f(y)}{x-y}\right| \leq |x-y|$ e quindi facendo tendere y ad x e applicando il teorema dei carabinieri si ottiene che $0 \leq \lim\limits_{y \to x}\left|\dfrac{f(x) - f(y)}{x-y}\right| \leq \lim\limits_{y \to x}|x-y| \Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ cioè la funzione è costante

Esercizio 3 Utilizzando la regola di derivazione del prodotto si ottiene:

$$(fgh)'(x_0) = (fg)'(x_0)h(x_0) + (fg)(x_0)h'(x_0) = \left[f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)\right]h(x_0) + (fg)(x_0)h'(x_0) =$$
$$= f'(x_0)g(x_0)h(x_0) + f(x_0)g'(x_0)h(x_0) + f(x_0)g(x_0)h'(x_0)$$

Esercizio 4 Si ottiene

(1) $\dfrac{1}{x}$

(2) rx^{r-1}

(3) $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(4) $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

(5) $\dfrac{1}{1+x^2}$

(6) $\cos\left(3x^3 + 4^x\right) \cdot \left(9x^2 + 4^x \ln 4\right)$

(7) $e^x\left(1 + 2x + x^2 + 21x^6 + 3x^7\right)$

(8) $2x \cdot \ln 7 \cdot 7^{x^2+4}$

(9) $\cos\left(\pi^{\tan x}\right)\cdot\pi^{\tan x}\cdot\dfrac{\ln\pi}{\cos^2 x}$

(10) $\ln x\cdot\sin x+\sin x+x\cdot\ln x\cdot\cos x$

(11) $e^{\sin\left(e^x\right)}\cdot\cos\left(e^x\right)\cdot e^x$

(12) $\dfrac{adx^2+2aex+de-cd}{(dx+e)^2}$

(13) $\left[\dfrac{4}{(x+3)^2}+\dfrac{x+1}{x+3}\sin x\right]e^{-\cos x}$

(14) $\dfrac{1+\cos(\ln x)}{x\left[x+\sin(\ln x)\right]}$

(15) $2xe^{x^2+1}\left[\ln\left(x^2+1\right)+\dfrac{1}{x^2+1}\right]$

(16) $\dfrac{(2\sin x\cos x-\sin x)\ln x}{\ln^2 x}+\dfrac{\sin^2 x+\cos x}{x\ln^2 x}$

(17) $\cos\left(\dfrac{\ln x}{x^3+4}\right)\cdot\left[\dfrac{1}{x\left(x^3+4\right)}-\dfrac{3x^2\ln x}{\left(x^3+4\right)^2}\right]$

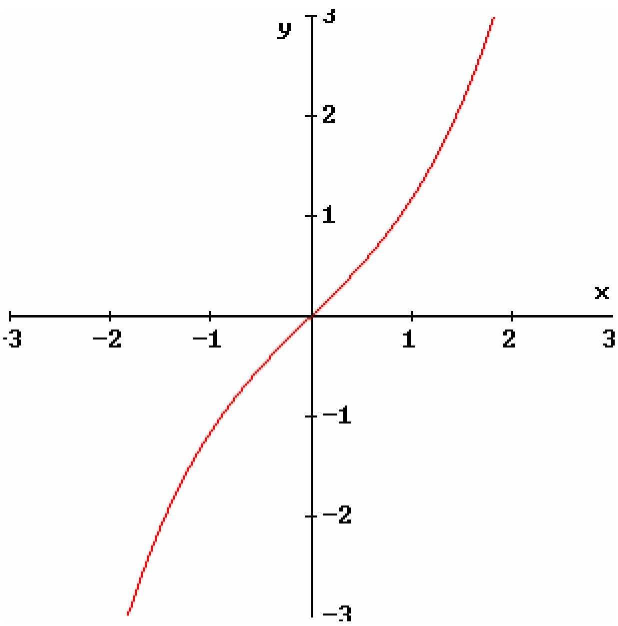
(18) $2\ln(\arcsin x)\cdot\dfrac{1}{\arcsin x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(19) $\dfrac{5x^4+\pi x^{\pi-1}}{(x\ln 2)\left[1+\left(x^5+x^\pi\right)^2\right]}-\dfrac{\arctan\left(x^5+x^\pi\right)}{x^2\ln 2}$

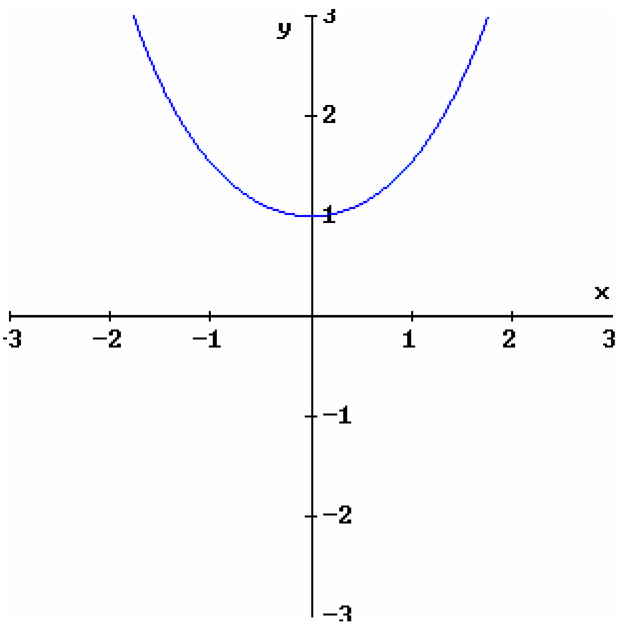
(20) $e^{\tan x}\left[\cos\left(30x^3-x^7\right)\cdot\left(90x^2-7x^6\right)+\sin\left(30x^3-x^7\right)\cdot\left(1+\tan^2 x\right)\right]$

Esercizio 5

a. È immediato verificare dalla definizione che $\sinh(-x)=-\sinh(x)$ e $\cosh(-x)=\cosh(x)$, cioè il seno iperbolico è dispari e il coseno iperbolico è pari. Riportiamo i grafici delle due funzioni:



$y=\sinh x$



$y=\cosh x$

b. $\cosh^2 x-\sinh^2 x=\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2=\dfrac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}-\dfrac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}=1$

c. Applicando le regole di derivazione si vede facilmente che

$(\sinh x)' = \cosh x$ $\qquad\qquad$ $(\cosh x)' = \sinh x$

d. Applicando la regola di derivazione di funzione inversa si ricava che

$$\left(\sinh^{-1} x\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \qquad\qquad \left(\cosh^{-1} x\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

e. Posto $s(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ e $c(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ si ha che $s'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ e $c'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. Quindi da $s(0) = \sinh^{-1}(0) = 0 \quad c(1) = \cosh^{-1}(1) = 0$ segue l'asserto

f. $(\tanh x)' = \dfrac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$

g. Si ottiene

(1) $\cosh(\cosh(\sinh x)) \cdot \sinh(\sinh x) \cdot \cosh x$

(2) $\cosh\left(\dfrac{x^3+x^2+x+1}{7^x}\right) \cdot \dfrac{\left(3x^2+2x+1\right) - \ln 7\left(x^3+x^2+x+1\right)}{7^x}$

(3) $e^{\sinh(\arctan x)} \cdot \cosh(\arctan x) \cdot \dfrac{1}{1+x^2}$

Esercizio 6 (1) Dato che risulta $f(0) = 3 \quad \lim_{x\to 0^+} ax^2+bx+3 = 3 \quad \lim_{x\to 0^-} 7e^x - 4 = 3$ la funzione è continua $\forall a,b \in \mathbb{R}$. Inoltre poiché $\lim_{x\to 0^+} 2ax+b = b \quad \lim_{x\to 0^-} 7e^x = 7$ la funzione è derivabile nell'origine se $b = 7$.

(2) Dato che risulta $f(1) = \dfrac{4a+b}{2} \quad \lim_{x\to 1^+} \dfrac{4a+b}{x^2+1} = \dfrac{4a+b}{2} \quad \lim_{x\to 1^-} x^2+2x(a+b)-1 = 2(a+b)$ la funzione è continua se $b = 0$. Inoltre poiché $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{-8ax}{\left(x^2+1\right)^2} = -2a \quad \lim_{x\to 1^-} 2x+2a = 2+2a$ la funzione è derivabile nell'origine se $a = -\dfrac{1}{2}$