Am1c – Soluzioni Tutorato X

Integrali impropri

Venerdì 12 Maggio 2006

Filippo Cavallari, Fabio Pusateri

Esercizio 1

(1) $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to+\infty}\int_{\frac{2}{\pi}}^{a} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx$. Ora applicando la sostituzione $\frac{1}{x}=t \quad \frac{dx}{x^2}=-dt$ si ottiene

$$\lim_{a\to+\infty}\int_{\frac{2}{\pi}}^{a} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to+\infty} -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{1}{a}} \sin t\,dt = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,dt = 1$$

(2) Si vede facilmente, integrando una volta per parti che risulta

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx = \lim_{a\to+\infty}\int_0^a x^n e^{-x}dx = \lim_{a\to+\infty}\left(-x^n e^{-x}\Big|_0^a + n\int_0^a x^{n-1}e^{-x}dx \right) = nI_n\,.$$

Osservando che $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1$ si ottiene facilmente che $I_n = n!$

Esercizio 2 Per entrambi gli integrali si ottiene facilmente che convergono se e solo se *a>0.* Calcoliamoli:

(1) Integrando due volte per parti si ottiene:

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx\,dx = \cancel{-\frac{1}{a}e^{-ax}\sin bx\Big|_0^{+\infty}} + \frac{b}{a}\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx = -\frac{b}{a^2}e^{-ax}\cos bx\Big|_0^{+\infty} - \frac{b^2}{a^2}\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx\,dx =$$

$$= -\frac{b}{a^2}e^{-ax}\cos bx\Big|_0^{+\infty} - \frac{b^2}{a^2}\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{b}{a^2} - \frac{b^2}{a^2}\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx\,dx$$

Risulta quindi:

$$\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{b}{a^2} \Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2}$$

(2) In modo analogo al primo si ottiene

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}$$

Esercizio 3 Stabilire quali dei seguenti integrali impropri convergono:

(1) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ converge perché $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx \le \int_1^{+\infty} e^{-x}dx$ che converge banalmente.

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ converge perché, integrando per parti, si ottiene

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \int_0^{1} \frac{\sin x}{x}dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \int_0^{1} \frac{\sin x}{x}dx - \left.\frac{\cos x}{x}\right|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx$$

e $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx$ converge in quanto $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx \le \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$

(3) $\int_0^{+\infty} \log x \arctan\frac{1}{x}dx$ diverge in quanto $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha \log x \arctan\frac{1}{x} = +\infty \quad \forall\alpha>1$

(4) $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{x^2}} \arctan\frac{1}{x}dx$ diverge in quanto $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-\frac{1}{x^2}} \arctan\frac{1}{x} = +\infty \quad \forall\alpha>1$

(5) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{x^2}} \arctan\frac{1}{x^2}dx$ converge in quanto $\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-\frac{1}{x^2}} \arctan\frac{1}{x^2} = 1$

(6) $\int_{-1}^{1} \ln\left(x^2\right)\tan x dx$ converge in quanto $\lim_{x\to 0}\ln\left(x^2\right)\tan x = 0$

Esercizio 4 Osserviamo innanzi tutto che il dominio di questa funzione è tutto l'asse reale. Integrando due volte per parti si ottine che $F(x) = \int_{-\infty}^{x} e^t \sin t dt = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x)$. Inoltre dal teorema fondamentale del calcolo integrale si ottiene che $F'(x) = e^x \sin x$. Calcoliamo i limiti all'infinito:

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0 \qquad\qquad \lim_{x\to+\infty} F(x) \text{ non esiste}$$

Lo studio del segno della funzione e della derivata prima portano a trovare i seguenti risultati:

$$F(x) > 0 \quad \forall x \in \left(\frac{\pi}{4}+k\pi; \frac{\pi}{4}+(k+1)\pi\right) \quad k = 2n, n\in\mathbb{Z}$$

$$F(x) = 0 \quad \forall x = \frac{\pi}{4}+k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$$

$$F(x) < 0 \quad \forall x \in \left(\frac{\pi}{4}+k\pi; \frac{\pi}{4}+(k+1)\pi\right) \quad k = 2n+1, n\in\mathbb{Z}$$

$$F'(x) > 0 \quad \forall x \in \left(k\pi; (k+1)\pi\right) \quad k = 2n, n\in\mathbb{Z}$$

$$F'(x) = 0 \quad \forall x = k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$$

$$F'(x) < 0 \quad \forall x \in \left(k\pi; (k+1)\pi\right) \quad k = 2n+1, n\in\mathbb{Z}$$

Esercizio 5 Per dimostrare che $\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = +\infty$ cerchiamo di maggiorarlo con una serie divergente. Infatti:

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\pi}{2} \left| \frac{\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)}{k\frac{\pi}{2}} \right| = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$$

E quindi tale integrale non può che divergere.