1. ESERCIZI SU ESTREMO SUPERIORE E INFERIORE DI INSIEMI

Esercizio 1.

Determinare estremo superiore ed inferiore (eventualmente massimo e minimo) dei seguenti insiemi:

$$
\begin{aligned}
(A)\colon= &\quad \{x = n - \frac{1}{n}\ ,\ n \in \mathbb{N}\} \\
(B)\colon= &\quad \{x = (-1)^n n + \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\} \\
(C)\colon= &\quad \{x = \frac{n-3}{n^2},\ n \in \mathbb{N}\} \cup (-1,1) \\
(D)\colon= &\quad \{x = n^2 + 3n - 1,\ n \in \mathbb{N}\} \\
(E)\colon= &\quad \{x \in \mathbb{R}\colon x^2 \leq 2\} \\
(F)\colon= &\quad \{x \in \mathbf{Q}\colon x^2 \leq 2\} \\
(G)\colon= &\quad \{x^3\colon x \in \mathbf{Z}\} \\
(H)\colon= &\quad \{x = sin\frac{n\pi}{8},\ n \in \mathbb{N}\} \\
(I)\colon= &\quad \{x = \frac{t+1}{t-2},\ t \in \mathbb{R},\ t > 2\} \\
(L)\colon= &\quad \{|x|\ :\ x^2 + x < 2,\ x \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}
$$

Suggerimento

· Verificare se l'insieme in questione, detto Γ, é limitato.

· Detti x_1 ed x_2 rispettivamente gli eventuali minorante e maggiorante di Γ, verificare se appartengono ad Γ, in caso affermativo si e' trovato il massimo e/o il minimo e l'esercizio e' terminato.

· Verificare, ove necessario, che $x_1 = inf\Gamma$ mostrando che é il piú grande dei minoranti di Γ, ovvero che

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in \Gamma\colon x_1 + \varepsilon > x$$

e $x_2 = sup\Gamma$ mostrando che é il piú piccolo dei maggioranti di Γ, ovvero che

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists x \in \Gamma\colon x_2 - \varepsilon < x.$$

Esercizio 2.
Dato l'insieme:

$$B = \left\{ x = \frac{1}{n^\alpha}, \quad \alpha \in (1, +\infty)\ n \in \mathbf{N} \right\}$$

determinarne estremo superiore ed inferiore.
Cosa cambia se $0 < \alpha < 1$?

Esercizio 3
Calcolare estremo superiore ed inferiore del seguente insieme:

$$A = \left\{ \frac{|x-3|}{|x+2|} \leq 1, \quad x \in \mathbb{R},\ x \neq -2 \right\}$$

Specificare se i valori trovati sono massimo e minimo.

Esercizio 4
Calcolare estremo superiore ed inferiore del seguente insieme:

$$C = \left\{ x = \frac{n^2-1}{3n^2} + \frac{2}{3}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

Esercizio 5
Calcolare estremo superiore ed inferiore del seguente insieme:

$$D = \left\{ x = \frac{3n - |\sin n|}{n}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$