

ESERCIZI SULLE SUCCESSIONI NUMERICHE

Esercizio 1

Calcolare i seguenti limiti facendo uso, se occorre, dei limiti notevoli:

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 1} - \frac{n^2 + 1}{n + 1} \right)$$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{1 + a^n}, \quad a \geq 1$$

$$(iii) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{(\ln n)^2 + \ln n^2}}{n^2 + 1}$$

$$(iv) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10\sqrt{(\ln n)^2 + \ln n^2}}{n^2 + 1}$$

$$(v) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \tan \frac{1}{n} \right)^n$$

$$(vi) \lim_{n \rightarrow \infty} \arctan(n^2 - 1) \frac{\cos 2n\pi}{n\pi}$$

$$(vii) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^{3n + \ln n}$$

$$(viii) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + n^2}{n^3} \cot \frac{1}{n}$$

$$(ix) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n^3} + \frac{1}{n} \right)^{\cot \frac{1}{n}}$$

$$(x) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n + 1} - \sqrt{n - 1})\sqrt{n}$$

$$(xi) \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \frac{2^n}{3^n}$$

$$(xii) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - \sin n}{n^2 + n}$$

$$(xiii) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{a} - 1)^n, \quad a \in \mathbf{R}^+$$

$$(xiv) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + n^2 \sin \frac{1}{n}}{n^2 + 1}$$

(xv) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\cos \pi x)^{2n}$ determinare per quali $x \in \mathbf{R}$ la successione converge.

(xvi) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \sin \frac{1}{n} (\ln n)^2}{(n+1)^2}$

(xvii) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[(n+2)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}} \right]$

(xviii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n-1} \right)^{\frac{n}{n+1}}$

(xix) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+n}{n^2-n+2} \right)^n$

(xx) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}}$

(xxi) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)^n$

(xxii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+2}{n} - \sqrt{n^2+4}$

Esercizio 2

Usando la definizione di limite dimostrare che:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-8n+4}{n-4} = +\infty$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{1+\frac{1}{n}} = e$

Esercizio 3

Dire per quali valori del parametro reale $a \in \mathbf{R}$ la seguente successione ammette limite finito o infinito:

$$x_n = a^n \frac{(-1)^n}{(n^2+1) \sin \frac{1}{n^2}}.$$

Esercizio 4

Teoremi di Cesaro:

Teorema 1: Se la successione di termine generale a_n ha per limite l , finito o infinito, allora si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = l$.

Teorema 2: Se $a_n > 0$ è tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$, finito o infinito, allora si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 \cdot \dots \cdot a_n)^{\frac{1}{n}} = l$.

Teorema 3: Se a_n è tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = l$, finito o infinito, allora $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = l$.

Teorema 4: Se $a_n > 0$ è tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, finito o infinito, allora $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} = l$.

Utilizzando i teoremi di Cesaro calcolare i seguenti limiti:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{3}}+\dots+n^{\frac{1}{n}}}{n}$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{\frac{1}{n}}$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}$$

$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^{\frac{1}{2n}}}{n}$$

Esercizio 5

Verificare che una successione a_n converge ad un numero l se e soltanto se entrambe le sottosuccessioni a_{2n} e a_{2n-1} convergono allo stesso limite l .

Esercizio 6

Supponiamo che le sottosuccessioni a_{2n} e a_{2n-1} estratte da una successione a_n siano entrambe monotone. Dimostrare che, se $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{2n} - a_{2n-1}) = 0$, allora a_n ammette limite.

Esercizio 7

Verificare con un esempio che l'enunciato dell'esercizio precedente non é invertibile, ovvero esistono successioni a_n che ammettono limite, tali che a_{2n} e a_{2n-1} sono monotone ma $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{2n} - a_{2n-1}) \neq 0$.