Soluzioni del I tutorato di Analisi Matematica 1A

Gabriele Nocco   Stefano Urbinati

25 settembre 2005

Esercizio 1. Dimostrare che, se a, b, $c \in \mathbb{R}^+$, risulta:
$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$

Soluzione 1. Sappiamo che $\forall a, b (a-b)^2 \geq 0$, quindi $a^2 + b^2 \geq ab$. A questo punto, applicando questa disuguaglianza per a e b, poi per b e c, ed in fine per a e c, sommando le tre disuguaglianze si avrá:
$2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ac)$. Ora non ci resta che dividere entrambi i termini della disuguaglianza per avere il risultato voluto.

Esercizio 2. Dire per quali $x \in R$ sono soddisfatte le seguenti disuguaglianze:

a) $\left| \frac{|x+1|+3}{|2x|+1} \right| \leq 4$

b) $|(4 - \sqrt{6}) \sin^2 x - \sqrt{6} \cos^2 x + 2\sqrt{3} \sin x| > 2\sqrt{2} \sin x$

c) $\log_{\frac{1}{2}}(7 - 2^x) - \log_{\frac{1}{2}}(5 + 4^x) + \log_{\frac{1}{2}} 7 \geq 0$

d) $|\log_9(2x^2 - x + 1) - \log_3(x - 2)| \leq 1$

Soluzione 2. a) Cominciamo a dire che il modulo piú esterno é sostanzialmente inutile, in quanto sia il numeratore sia il denominatore sono costituiti da un modulo piú un numero positivo, quindi tali quantitá saranno sempre positive, e la frazione di due numeri positivi é positiva. Quindi ora andiamo a discutere i valori per cui é verificata:

$$|x + 1| + 3 \geq 4(|2x| + 1)$$

Da qui si avrá, quindi, studiando i vari casi, che la disuguaglianza é vera $\forall\, x \in \mathbb{R}$

b) Dentro al modulo no si ha altro che una equazione di secondo grado in $sen(x)$, quindi si puó applicare la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado. Lo stesso si avrá una volta levato il modulo.

c) Una volta definito il campo di esistenza, cioé l'insieme delle x per cui ha senso la disequazione,si possono sruttare le proprietá dei logaritmi riducendosi alla disequazione $\frac{7-2^x}{5+4^x} \geq 7$

d) Si suggerisce di portare alla stessa base i due logaritmi, ad esempio ambe due in base 3, che essendo $9 = 3^2$, si puó fare semplicemente mettendo una radice all'argomento del logaritmo in bese 9. Quindi come sopra ci si riduce a disequazioni piú semplici.

Esercizio 3. Si provi per induzione che, per ogni intero positivo n, risulta:

$$n^n \geq n!$$

Soluzione 3. Verifichiamo la disugaglianza per un n qualsiasi, cosí da verificare la base induttiva. Per $n = 1$ si avrá che $1 \geq 1$, e questa será il nostro punto di partenza. Ora supponiamo vera la disuguaglianza per n e verifichiamola per $n+1$. Quindi avremo $(n+1)^{(n+1)} \geq (n+1)!$, ma $(n+1)!$ non é altro che $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n \cdot (n+1)$. D'altro canto $(n+1)^{(n+1)} = (n+1)^n \cdot (n+1)$, ma $(n+1)^n \geq n^n$ e quindi si avrá la soluzione.

Esercizio 4. Si provi per induzione che, per ogni intero positivo n, risulta:

$$\sum_{k=0}^{n} (4k+1) = (2n+1)(n+1)$$

Soluzione 4. Si verifica l'uguaglianza, ad esempio sostituendo $n = 0$. Dopo di che é facile dimostrare il passo induttivo. Per farlo si suggerisce di separare la sommatoria.

Esercizio 5. Si provi per induzione che, per ogni intero positivo n, risulta

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Soluzione 5. Base induttiva $n = 1 => 1 = 1$
Per la dimostrazione si consiglia nuovamente di considerare le prime n-sime somme di quadrati piú la $(n+1)$-sima.

Esercizio 6. Dimostrare la seguente proprietà, applicando il principio d'induzione:
per tutti i naturali $n \in \mathbb{N}$, la potenza n-esima di 4 diminuita di 1 è divisibile per 3.

Soluzione 6. Si puó verificare banalmente per $n = 1$.
Ora supponendo che $4^n - 1 = 3k$ verifichiamo che $4^{n+1} - 1 = 3k'$. Il suggerimento é considerare $4^{n+1} = 4^n \cdot 4$

Esercizio 7. Dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Soluzione 7. Ancora una volta si verifica il tutto per un n fissato, ad esempio $n = 0$. Ora il passo induttivo é ancora semplice da verificare separando la sommatoria.

Esercizio 8. Dimostrare, per induzione, le seguenti uguaglianze:

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2$$

Soluzione 8. L'uguaglianza tra secondo e terzo termine é immediatamente verificate. Ora si suggerisce di verificare l'uguaglianza tra primo e secondo termine. Il tutto verificando sempre per un n, magari $n = 0$, e poi andando a separare la sommatoria.

Esercizio 9. ***Momento relax***: trova l'errore in queste dimostrazioni per induzione giustificando la risposta.

- Zero uomini non hanno orecchie, prendendo questo come base induttiva possiamo supporre che, ogni gruppo di $n-1$ persone non abbiano orecchie, quindi adesso procediamo col passo induttivo; aggiungiamo un uomo al gruppo di $n-1$ uomini che abbiamo come base induttiva, e togliamone uno dall'insieme originale. Così modificato questo sarÃ un insieme di $n-1$ che per ipotesi induttiva non ha orecchie!!!
- C'è una scatola con n pastelli di diversi colori. Prendo un pastello, questo è rosso (base induttiva); per ipotesi ogni gruppo di $n-1$ pastelli è formato da pastelli rossi; allora tutti i pastelli della scatola sono rossi! Infatti aggiungendo un pastello al gruppo degli $n-1$ dell'ipotesi induttiva e togliendone uno dei vecchi, ottengo un gruppo di $n-1$ pastelli che per ipotesi sono tutti rossi e l'asserto è verificato!!!