Soluzioni del VIII tutorato di analisi matematica 1a

Gabriele Nocco   Stefano Urbinati

28 novembre 2005

Esercizio 1. Calcolare i seguenti limiti:

a) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{7}{n}\right)^{2n}$ Sol: basta applicare la sostituzione 7/n=1/t per riottenere un integrale notevole.

b) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3-2}{n+2}+\frac{n^3-2n^2}{n+1}\right)$ Sol: facilmente $+\infty$

c) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n!}\right)^{n^n}$ Sol: sostituite n^n con $n!\frac{n^n}{n!}$

d) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{2}-1\right)^n$ Sol: vi basta maggiorare $\sqrt[n]{2}$ con $\sqrt{2}$

e) $\lim_{n\to\infty}\sin\left(2\pi\sqrt{n^2+\sqrt{n}}\right)$ Sol: notate l'andamento dell'argomento della radice all'infinito ricordandovi che è moltiplicata per 2π. (Ris= 0)

Esercizio 2. Trovare, se esiste, il limite delle seguenti successioni:

a) $a_n = 1+\sin n$ Sol: no!

b) $a_n = \arctan\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ Sol: si (0)

c) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}\cdot\frac{1+(-1)^n}{2}$ Sol: si (0)

d) $a_n = \frac{n!}{2^n}\sin n\frac{\pi}{2}$ Sol: no (potete farlo vedere creando le sottosuccessioni che rendono costante il valore del seno)

e) $a_n = \sqrt[n]{(-1)^n n}$ Sol: no

Esercizio 3. Dimostrare che, se $a_n > 0\ \forall n\in\mathbb{N}$, $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ e $b_n \to b > 1$ allora $a_n \to \infty$.

Sol: il modo più semplice è farlo vedere per assurdo supponendo che il limite di a_n sia finito e sfruttando la definizione di limite.

Esercizio 4. Trovare il massimo e il minimo limite delle seguenti successioni:

a) $a_n = 1-\cos n$

b) $a_n = \arctan{(-2)^n}$

c) $a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$

d) $a_n = \frac{n!}{2^n} \sin n\frac{\pi}{2}$

e) $a_n = \sqrt[n]{(-1)^n n}$

f) $a_n = \sqrt{n^2 - 1} - n$

g) $a_n = 1 + (-1)^n$

h) $a_n = \frac{n+1}{n} \sin \frac{n\pi}{10}$

i) $a_n = \sin^2\left(\frac{n^2}{2n+1}\right) + \cos^2\left(\frac{n^3+6n}{(n+2)^2}\right)$