

Soluzioni del VIII tutorato di analisi matematica

1a

Gabriele Nocco Stefano Urbinati

28 novembre 2005

Esercizio 1. Calcolare i seguenti limiti:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{n}\right)^{2n}$ Sol: basta applicare la sostituzione $7/n=1/t$ per riottenere un integrale notevole.
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3-2}{n+2} + \frac{n^3-2n^2}{n+1}\right)$ Sol: facilmente $+\infty$
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n!}\right)^{n^n}$ Sol: sostituite n^n con $n! \frac{n^n}{n!}$
- d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{2} - 1\right)^n$ Sol: vi basta maggiorare $\sqrt[n]{2}$ con $\sqrt{2}$
- e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2\pi\sqrt{n^2 + \sqrt{n}})$ Sol: notate l'andamento dell'argomento della radice all'infinito ricordandovi che è moltiplicata per 2π . (Ris= 0)

Esercizio 2. Trovare, se esiste, il limite delle seguenti successioni:

- a) $a_n = 1 + \sin n$ Sol: no!
- b) $a_n = \arctan\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ Sol: si (0)
- c) $a_n = \frac{(-1)^n}{n} \cdot \frac{1+(-1)^n}{2}$ Sol: si (0)
- d) $a_n = \frac{n!}{2^n} \sin n \frac{\pi}{2}$ Sol: no (potete farlo vedere creando le sottosuccessioni che rendono costante il valore del seno)
- e) $a_n = \sqrt[n]{(-1)^n n}$ Sol: no

Esercizio 3. Dimostrare che, se $a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ e $b_n \rightarrow b > 1$ allora $a_n \rightarrow \infty$.

Sol: il modo più semplice è farlo vedere per assurdo supponendo che il limite di a_n sia finito e sfruttando la definizione di limite.

Esercizio 4. Trovare il massimo e il minimo limite delle seguenti successioni:

- a) $a_n = 1 - \cos n$

- b) $a_n = \arctan(-2)^n$
- c) $a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$
- d) $a_n = \frac{n!}{2^n} \sin n\frac{\pi}{2}$
- e) $a_n = \sqrt[n]{(-1)^n n}$
- f) $a_n = \sqrt{n^2 - 1} - n$
- g) $a_n = 1 + (-1)^n$
- h) $a_n = \frac{n+1}{n} \sin \frac{n\pi}{10}$
- i) $a_n = \sin^2\left(\frac{n^2}{2n+1}\right) + \cos^2\left(\frac{n^3+6n}{(n+2)^2}\right)$