IV tutorato di Analisi Matematica 1A

Gabriele Nocco Stefano Urbinati

17 ottobre 2005

Esercizio 1. Verificare quale tra le seguenti è una distanza in $\mathbb{R}$:

a) $d(x,y) = \sqrt{|x-y|}$

La distanza è una funzione da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^2$ che verifica le seguenti proprietà:

- $d(x,y) \geq 0 \quad \wedge \quad d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
  -In questo primo caso che la distanza sia ≥ 0 è ovvio perchè la radice è definita positiva. $\sqrt{|x-y|}$ sarà uguale a 0 $\Leftrightarrow |x-y| = 0 \Leftrightarrow x = y$. OK! La prima propietà è verificata!!!
- $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
  -Per la seconda proprietà sfruttiamo quello che conosciamo sui moduli: $d(x,y) = \sqrt{|x-y|} = \sqrt{|-(x-y)|} = \sqrt{|y-x|} = d(y,x)$. OK!
- (disuguaglianza triangolare) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(x,z) \forall x, y, z \in \mathbb{R}$
  -Devo verificare se $\sqrt{|x-y|} \leq \sqrt{|x-z|} + \sqrt{|z-y|} \Rightarrow$ facendo i quadrati ottengo $|x-y| \leq |x-z| + |z-y| + 2\sqrt{|x-z|}\sqrt{|z-y|}$. Se verifico la disuguaglianza che ho appena ottenuto ho finito... Poichè $|x-y| = |x-z+z-y| \leq |x-z| + |z-y| \leq |x-z| + |z-y| + 2\sqrt{|x-y|}\sqrt{|y-z|}$. OK!!
  Questa è una distanza!!

b) $d(x,y) = |x^2 - y^2|$ Non vale la prima propietà, non è una distanza!

N.B. Perchè sia una distanza la funzione deve verificare tutte le proprietà quindi appena una non è verificata potete concludere senza verificare le altre...

c) $d(x,y) = |x-y|^2$ Non vale la disuguaglianza triangolare, non è una distanza.

d) $d(x,y) = |\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}|$ Non vale la prima proprietà, non è una distanza.

e) $d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq y \\ 0 & \text{se } x = y \end{cases}$ È una distanza!

Esercizio 2. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false e motivare la risposta:

Sia E un insieme non vuoto di numeri reali.

a) l è estremo inferiore per E se l è un minorante di E ed è tale che $\forall x \in E, \exists\, \epsilon > 0$ per cui risulta $x < l + \epsilon$

b) L'intervallo $[\,a, +\infty)$ risulta chiuso in $\mathbb{R}$, mentre l'insieme $[\,a, b)$ non è nè aperto nè chiuso.

Soluzione 1. a) L'affermazione è falsa. Facciamo un controesempio:

sia il nostro insieme di partenza $(0, 1)$ il cui estremo inferione è ovviamente 0; condideriamo $l = -1$. l è un minorante per l'insieme e per ogni $x \in (0, 1)$, scegliendo $\epsilon = 3$, ottengo che $l + \epsilon > x$ pur non essendo -1 un estremo inferiore.

b) Consideriamo il secondo insieme. Utilizziamo la definizione con i punti di accumulazione (un insieme è chiuso se contiene tutti i suoi punti di accumulazione). Ovviamente b è di accumulazione e non è contenuto nell'insieme quindi l'insieme non è chiuso. Per vedere se è aperto, verifichiamo se il complementare è chiso. Il complementare è $(-\infty, a) \cup [b, \infty)$, dove a è punto di accumulazione ma non è contenuto nell'insieme, quindi $[a, b)$ non è neanche aperto!

Esercizio 3. Trovare, qualora esistano, estremo superiore e inferiore dei seguenti insiemi e dire se sono rispettivamente un massimo e un minimo per lo stesso insieme. Motivare le risposte verificandole attraverso la caratterizzazione.

a) $E = \{x \in [\,\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\,] : x = \frac{m}{2^n}, n, m \in \mathbb{N}\}$

Sol: min=inf=$\frac{1}{2}$, max=sup=$\frac{2}{3}$

b) $E = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{3n-2}{2n}, n \in \mathbb{N}\}$

Sol: min=inf=$\frac{1}{2}$, sup=$\frac{3}{2}$

c) $E = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}\}$

Sol: min=inf=-1, max=sup=$\frac{1}{2}$

Esercizio 4. Dimostrare che ogni insieme A, chiuso e limitato, ha Massimo e Minimo.

Esercizio 5. Dato l'insieme $A = \{a_n \in \mathbb{R} : a_n = (-1)^n \frac{n}{n+3}, n \in \mathbb{N}\}$ determinare, sup A, inf A.

Esercizio 6. Dimostrare che dati due insiemi qualunque $X,\ Y \neq \emptyset$, $Y \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$, si ha

$$\inf X \leq \inf Y \leq \sup Y \leq \sup X.$$

Esercizio 7. Dimostrare che dati due insiemi qualunque $X,\ Y \neq \emptyset$, se $X + Y := \{x + y, x \in X,\ y \in Y\}$, si ha:

$$\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y$$

soluzione: Per ogni $y \in Y$ $y \leq \sup Y$ e $y \geq \inf Y$, pertanto da $\inf Y \leq y \leq \sup Y$ segue che $\inf Y \leq \sup Y$. D'altra parte, poichè $Y \subseteq X$, $\sup X$ è un maggiorante per Y, quindi $\sup X \geq y\ \forall y \in Y$, e allora $\sup X \geq \sup Y$ dato che $\sup Y$ è il più piccolo dei maggioranti. Analogamente si dimostra che $\inf X \leq \inf Y$.

Esercizio 8. Sia $X \in \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$ e sia $tX := \{tx :\ x \in X,\ t \in \mathbb{R}^+\}$, allora si ha

$$\sup(tX) = t \sup X$$

Esercizio 9. Dimostrare che un insieme $X \in \mathbb{R}$ e' limitato $\Longleftrightarrow$ esiste un numero reale $M > 0$ tale che $|x| < M,\ \forall x \in X$.