SOLUZIONI ESERCIZI SU MASSIMO E MINIMO LIMITE DI SUCCESSIONI

Determiniamo prima il minimo limite. Sapendo che $\min\lim \sin n = -1$, sia n_k una sottosuccessione di indici tali che $\lim_{k\to\infty} \sin n_k = -1$. Se k é sufficientemente grande, ovvero $k > \nu_1$, si ha

$$-1-\varepsilon < -1 < \sin n_k < -1+\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0,$$

per cui $0 < \sin n_k + 1 < \varepsilon$. Essendo una quantitá compresa tra 0 e un numero piú piccolo di 1, la sua parte intera dará sempre 0. Quindi avendo provato che 0 é un minorante e avendo trovato una sottosuccessione di indici tali che $\lim_{k\to\infty}[\sin n_k + 1] = 0$, deduciamo che il minimo limite é proprio 0.
Passiamo al massimo limite. Ragionando di nuovo su una sottosuccessione n_h, che tenda questa volta al massimo limite di $\sin n$, cioé tale che $\lim_{h\to\infty} \sin n_h = +1$, si ha, per $h > \nu_2$, $1-\varepsilon < \sin n_h < 1+\varepsilon$. Quindi $2-\varepsilon < 1+\sin n_h < 2 < 2+\varepsilon$. Osserviamo peró che 2 non viene mai raggiunto, perché $\sin n_h$ é uguale ad uno solamente al limite. Quindi in realtá andremo a calcolare la parte intera di una quantitá che é sempre piú piccola di 2, é infatti compresa tra 1 e 2, quindi il risultato della parte intera sará 1. Dunque abbiamo provato che $\sin n + 1 < 2$, quindi che $[\sin n + 1] \leq 1$, inoltre abbiamo anche trovato una sottosuccessione di indici tali che $\lim_{h\to\infty}[\sin n_h + 1] = 1$, quindi il massimo limite é esattamente 1.

Esercizio 2
(i) $a_n = \frac{n+1}{n} \sin \frac{n\pi}{10}$. Osserviamo che, mentre il termine $\frac{n+1}{n}$ tende a 1, $\sin \frac{n\pi}{10} = 1$ se $\frac{n\pi}{10} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, ovvero $n_1 = 5 + 20k$. D'altra parte $\sin \frac{n\pi}{10} = -1$ se $\frac{n\pi}{10} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, ovvero $n_2 = 15 + 20k$. Quindi abbiamo due sottosuccessioni a_{n_1} e a_{n_2} che tendono rispettivamente a $+1$ e -1. Proviamo che 1 é maxlim. Sia $\varepsilon > 0$,

$$\frac{n+1}{n} \sin \frac{n\pi}{10} < \frac{n+1}{n} \cdot 1 < 1+\varepsilon \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n} < 1+\varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} = \nu.$$

Proviamo ora che -1 é minlim. Sia $\varepsilon > 0$,

$$\frac{n+1}{n} \sin \frac{n\pi}{10} > \frac{n+1}{n} \cdot (-1) > -1-\varepsilon \Leftrightarrow -1 - \frac{1}{n} > -1-\varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} = \nu.$$

(ii) $a_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}$. Prendiamo in considerazione le sottosuccessioni dei pari e dei dispari, ovvero $a_{2n} = \frac{2n+1}{2n}$ e $a_{2n+1} = -\frac{2n+2}{2n+1}$. Si ha

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = -1,$$

quindi dimostriamo che $+1$ e -1 sono massimo e minimo limite. Sia $\varepsilon > 0$,

$$(-1)^n \frac{n+1}{n} < \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} < 1 + \varepsilon \;\Leftrightarrow\; n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Quindi 1 é massimo limite. Sia ancora $\varepsilon > 0$,

$$(-1)^n \frac{n+1}{n} > -\frac{n+1}{n} = -1 - \frac{1}{n} > -1 - \varepsilon \;\Leftrightarrow\; n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

(iii) $a_n = \arctan(-2)^n$. Prendiamo in considerazione le sottosuccessioni dei pari e dei dispari, ovvero $a_{2n} = \arctan(-2)^{2n} \to \frac{\pi}{2}$ per $n \to \infty$, e $a_{2n+1} = \arctan(-2)^{2n+1} \to -\frac{\pi}{2}$ per $n \to \infty$. Dimostriamo che $\frac{\pi}{2}$ é massimo limite: sia $\varepsilon > 0$,

$$\arctan(-2)^n < \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} + \varepsilon.$$

Dimostriamo che $-\frac{\pi}{2}$ é minimo limite: sia $\varepsilon > 0$,

$$\arctan(-2)^n > -\frac{\pi}{2} > -\frac{\pi}{2} - \varepsilon.$$

(iv) $a_n = (-1)^n + \sin\frac{1}{n}$. Prendiamo in considerazione la sottosuccessione dei pari, ovvero $a_{2n} = 1 + \sin\frac{1}{2n} \to 1$ per $n \to \infty$. Se consideriamo invece la sottosuccessione dei dispari, si ha $a_{2n+1} = -1 + \sin\frac{1}{2n+1} \to -1$ per $n \to \infty$. Come al solito dimostriamo che 1 é massimo limite: sia $\varepsilon > 0$,

$$(-1)^n + \sin\frac{1}{n} < 1 + \sin\frac{1}{n} < 1 + \varepsilon \;\Leftrightarrow \sin\frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\arcsin\varepsilon}.$$

Dimostriamo che -1 é minimo limite: sia $\varepsilon > 0$,

$$(-1)^n + \sin\frac{1}{n} > -1 + \sin\frac{1}{n} > -1 - \varepsilon.$$

Osserviamo che $\sin\frac{1}{n}$ é positivo per ogni $n \geq 1$.