Am1 primo esonero, 2 novembre 2005
SOLUZIONI

Esercizio 1.
Calcolare gli eventuali punti di accumulazione del seguente insieme:
$$A = \left\{ x = \frac{n}{n+1},\ n \in \mathbf{N} \right\}$$
Dimostrare che il punto $x = \frac{10}{11}$ é isolato.
Giustificare le risposte.

Per n "grande" la frazione $\frac{n}{n+1}$ si avvicina ad uno, quindi proviamo a dimostrare che 1 é punto di accumulazione:
$$\forall \varepsilon > 0 \exists\ \overline{n} : \left| 1 - \frac{\overline{n}}{\overline{n}+1} \right| < \varepsilon$$
ovvero
$$\forall \varepsilon > 0 \exists\ \overline{n} : \frac{1}{\overline{n}+1} < \varepsilon \ \Leftrightarrow\ \overline{n} > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$
e sappiamo che $\overline{n}$ esiste per la proprietá di Archimede. Quindi 1 é di accumulazione. Possiamo osservare che l'insieme é discreto, ovvero numerabile, ovvero puó essere messo in corrispondenza con i naturali, quindi non ci sono altri punti di accumulazione. Questo fatto si dimostra per un punto qualunque dell'insieme esattamente nel modo in cui ora ci accingiamo a provare che $x = \frac{10}{11}$ é isolato. Dimostriamo che esiste un intorno di raggio r in cui non cadono altri punti di A eccetto $x = \frac{10}{11}$. Tale

raggio va scelto nel seguente modo:

$$r < \min\left\{\left|\frac{10}{11} - \frac{11}{12}\right|, \left|\frac{10}{11} - \frac{9}{10}\right|\right\}.$$

Poiché abbiamo preso un raggio minore della distanza tra $x = \frac{10}{11}$ e i punti prossimi a lui a destra e a sinistra nell'insieme, nell'intorno dato non possono esistere altri punti dell'insieme per costruzione!

Esercizio 2.
Calcolare estremo superiore ed inferiore del seguente insieme. Specificare se si tratta di massimo o minimo. Giustificare le risposte.

$$A = \{x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3+n}},\ n \in \mathbf{N}\}$$

L'insieme é costituito da numeri positivi, che al crescere di n decrescono e si "avvicinano" a 0. Dimostriamo che 0 é l'inf. dell'insieme. Zero é un minorante, infatti

$$0 < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3+n}} \forall\ n \in \mathbf{N}$$

inoltre é il massimo dei minoranti, infatti:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \overline{n} : \ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3+\overline{n}}} < 0 + \varepsilon \ \Leftrightarrow\ \overline{n} > \frac{2}{\varepsilon^2} - 3.$$

Passiamo all'estremo superiore: sia $0 \in \mathbf{N}$.

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3+n}} \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\ \forall n \in \mathbf{N},$$

quindi, poiché $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ appartiene all'insieme (si ottiene per $n = 0$) ed é un maggiorante, é anche il massimo dell'insieme.

Esercizio 3.
Dimostrare per induzione che

$$(*)\ \sqrt{(n+2)^{n+2}} \geq \sqrt{(n+2)!} \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

Base induttiva: per $n = 0$ é vero, infatti

$$\sqrt{(2)^2} = 2 \geq \sqrt{(2)!} = 2.$$

Passo induttivo: per ipotesi suppongo vera la P_n, ovvero $(*)$, e dimostro P_{n+1}.

$$\sqrt{(n+3)^{n+3}} = \sqrt{(n+3)^{n+2}(n+3)} \geq \sqrt{(n+2)^{n+2}(n+3)}$$

a questo punto usiamo l'ipotesi induttiva:

$$\sqrt{(n+2)^{n+2}(n+3)} \geq \sqrt{(n+2)!(n+3)} = \sqrt{(n+3)!}$$

quindi, mettendo insieme le due righe di passaggi otteniamo

$$\sqrt{(n+3)^{n+3}} \geq \sqrt{(n+3)!}$$

Esercizio 4.
Dimostrare UNA delle due proposizioni:
i) Dimostrare che per ogni coppia di numeri $a, b \ \in \mathbb{R}$, esiste un numero razionale $q \in \mathbf{Q}$ tale che $a < q < b$.
(Ovvero $\mathbf{Q}$ é denso in $\mathbb{R}$.)

ii) Sia $\mathbb{R}$ definito come campo ordinato in cui vale l'assioma di Dedekind. Sia $A \in \mathbb{R}$ un insieme superiormente limitato. Dimostrare che l'insieme dei maggioranti di A ammette minimo.
(Ovvero dimostrare l'esistenza dell'estremo superiore)