Am1 appello A

16 gennaio 2006

Esercizio 1.

Calcolare estremo superiore ed inferiore del seguente insieme

$$A = \left\{ x = \ln\left(1 + \frac{3}{n}\right) - \frac{n}{2},\ n \in \mathbf{N} \setminus \{0\} \right\}$$

La successione che definisce l'insieme é decrescente, infatti il primo termine, $x = \ln 4 - \frac{1}{2}$, é un maggiorante:

$$\ln\left(1 + \frac{3}{n}\right) - \frac{n}{2} \leq \ln 4 - \frac{n}{2} \leq \ln 4 - \frac{1}{2}.$$

Quindi $\frac{1}{2}$ é massimo il dell'insieme. Per provare che $-\infty$ é l'estremo inferiore si deve provare che

$$\forall M > 0\ \exists \nu \in \mathbb{R} : \exists x \in\ A, x < -M\ \forall n > \nu.$$

Pertanto:

$$\ln\left(1 + \frac{3}{n}\right) - \frac{n}{2} \leq \ln 4 - \frac{n}{2} < -M \ \Leftrightarrow\ -\frac{n}{2} < -M - \ln 4 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ n > 2M + 2\ln 4 = \nu.$$

Esercizio 2.

Dimostrare per induzione la seguente proposizione

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 2$$

Base induttiva: $n = 1$, $2 = 2^2 - 2$, sempre verificata. Suppongo l'identitá vera per n e la dimostro per $n + 1$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} 2^k = \sum_{k=1}^{n} 2^k + 2^{n+1} = (\text{per ipotesi induttiva }) = 2^{n+1} - 2 + 2^{n+1}$$

l'ultimo membro é uguale a $2^{n+2} - 2$, cioé la tesi.

Esercizio 3.
Calcolare massimo e minimo limite della seguente successione (giustificare le affermazioni)

$$a_n = n\left(\sin\frac{n\pi}{4} - 1\right)$$

Per $n_1 = 2 + 8k$ $a_{n_1} \equiv 0$, mentre per $n_2 = 4k$ si ha $a_{n_2} \to -\infty$. Pertanto concudiamo subito che il minimo limite é $-\infty$. Il massimo limite é zero, per provarlo basta mostrare che 0 é un minorante definitivo. poiché $\sin\frac{n\pi}{4} \leq 1$, la quantitá tra parentesi $\left(\sin\frac{n\pi}{4} - 1\right)$ é sempre minore o uguale a zero, quindi $a_n \leq 0$.

Esercizio 4.
Studiare il comportamento della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt[n]{n} - 1)^n;$$

Dato che $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}-1 = 0$, $(\sqrt[n]{n}-1)$ é definitivamente compreso in un intorno di zero, quindi abbiamo una serie geometrica con ragione minore di uno, cioé copnvergente.
Studiare il comportamento della seguente serie al variare del parametro reale x.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2x)^n}{\log n}$$

Con il criterio della radice ennesima si deduce che la serie converge per $|2x| < 1$, ovvero $|x| < \frac{1}{2}$. Se $x = -\frac{1}{2}$ la serie converge per il criterio di Leibniz, se $x = \frac{1}{2}$ diverge.

Esercizio 5.

Calcolare il limite delle seguenti successioni

$$\lim_{n\to\infty}\left|\cos\left(\frac{2n^2+3}{7n^2}\right)\right|^n$$

Il coseno é una funzione continua, quindi $\left|\cos\left(\frac{2n^2+3}{7n^2}\right)\right| \to \left|\cos\frac{2}{7}\right|$, questa é una quantitá compresa tra 0 e 1, quindi la successione tende a zero.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2\sin^2 n}{n}\right)^{\frac{1}{\sin^2 n}}\frac{1}{e^{-\frac{n}{2}}}$$

Riscriviamo la successione nel seguente modo:

$$\left(\frac{n+2\sin^2 n}{n}\right)^{\frac{1}{\sin^2 n}}\frac{1}{e^{-\frac{n}{2}}}=\left(1+\frac{2\sin^2 n}{n}\right)^{\frac{n}{2\sin^2 n}\frac{2}{n}}e^{\frac{n}{2}}$$

la prima parte tende a $e^{\frac{2}{n}}$, che tende a 1, mentre il termine $e^{\frac{n}{2}}$ diverge $+\infty$, quindi il limite della successione di partenza é $+\infty$.