Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2003/2004
AL2 - algebra 2, gruppi, anelli e campi
Tutorato
2 dicembre 2003

1. Un ideale I di un anello commutativo ed unitario A si dice *primario* se
$$ab \in I, a \notin I \Longrightarrow \exists n \geq 1 \text{ tale che } b^n \in I.$$
   (a) Verificare che ogni ideale primo di A è primario.
   (b) Provare che un ideale I di A è primario se e solo se ogni zero-divisore di A/I è nilpotente.
   (c) Verificare che l'ideale $8\mathbb{Z}$ di $\mathbb{Z}$ è primario.
   (d) Verificare che l'ideale $6\mathbb{Z}$ di $\mathbb{Z}$ non è primario.
   (e) Dare una caratterizzazione degli ideali primari di $\mathbb{Z}$.

2. (a) Sia A un anello commutativo ed unitario dotato di un solo ideale massimale M. Provare che un elemento di A è invertibile se e solo se appartiene a $A - M$.
   (b) Trovare gli ideali massimali di $\mathbb{Z}_5$, di $\mathbb{Z}_9$ e di $\mathbb{Z}_{10}$.
   (c) Determinare per quali interi $m \geq 2$ l'anello $\mathbb{Z}_m$ possiede un solo ideale massimale.

3. Sia $A = \mathbb{Q}[X]$ l'anello dei polinomi a coefficienti razionali; fissato un numero razionale q, si consideri l'ideale
$$I_q = \{f(X) \in A \mid f(q) = 0\}.$$
   (a) Provare che I_q è un ideale massimale di A.
   (b) Se q e q' sono due numeri razionali distinti, provare che $I_q \cap I_{q'}$ è un ideale di A che <u>non</u> è un ideale primo.

4. Sia p un numero primo fissato ed
$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & bp \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}.$$
   (a) Verificare che A è un sottoanello di $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$, commutativo ed unitario.
   (b) Provare che A è un campo determinando esplicitamente l'inverso di ogni suo elemento non nullo.
   (c) Determinare un isomorfismo esplicito tra A e il campo $\mathbb{Q}[X]/(X^2 - p)$.

5. Si consideri il seguente sottoinsieme dell'anello $\mathbb{Q}[X]$:
$$A = \{a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \mid n \geq 0, a_0 \in \mathbb{Z}, a_i \in \mathbb{Q} \text{ per } i \geq 1\}.$$
   (a) Verificare che A è un sottoanello di $\mathbb{Q}[X]$.
   (b) Provare che il seguente sottoinsieme di A
$$I = \left\{b_1X + \cdots + b_jX^j + \cdots + b_mX^m \mid m \geq 1,\, b_j \in \mathbb{Q} \text{ per} j \geq 1\right\}$$
   è un ideale primo di A.
   (c) Descrivere gli elementi dell'ideale generato da X in A.
   (d) Provare che I non è un ideale principale. (Sugg. $X \in I$)