Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2003/2004
AL2 - Algebra 2, gruppi, anelli e campi
Tutorato
28 ottobre 2003

1. Sia $G = \langle g \rangle$ un gruppo ciclico con 20 elementi.

1. Elencare tutti i generatori di G.
2. Determinare tutti i sottogruppi di G e disegnarne il diagramma lineare.
3. Provare che l'applicazione $f : G \longrightarrow G$ definita da $f(x) = x^7$ è un automorfismo di G.
4. Determinare l'ordine di f in $Aut(G)$.

2. Determinare tutti gli omomorfismi da $(\mathbb{Z}_{20}, +)$ a $(\mathbb{Z}_{24}, +)$ e per ciascuno di essi il nucleo e l'immagine.

3. Sia H il sottogruppo ciclico di S_8 generato da $(351)(27)(48)$. Allora H agisce come un gruppo di trasformazioni sull'insieme $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Calcolare l'orbita e lo stabilizzatore di ogni elemento di X.

4. Sia K il sottogruppo di S_8 generato da (13) e (247). Allora K agisce come un gruppo di trasformazioni sull'insieme $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Calcolare l'orbita e lo stabilizzatore di ogni elemento di X.

5. Descrivere l'orbita e lo stabilizzatore della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ quando il gruppo $GL_2(\mathbb{R})$ agisce per coniugazione su se stesso.

Se la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z}_3)$, trovare il numero degli elementi della sua orbita quando il gruppo $GL_2(\mathbb{Z}_3)$ agisce per coniugazione su se stesso.

6. Sia $G = \{z \in \mathbb{C} \quad | \quad |z| = 1\}$ il gruppo moltiplicativo dei numeri complessi di modulo 1.

1. Sia $z_0 \in G$. Provare che $z_0 G = \{z_0 z \quad | \quad z \in G\}$ è un sottogruppo di G e calcolare $G/z_0 G$.
2. $G/\langle -1 \rangle$ è isomorfo ad un gruppo noto. Quale?
3. Siano $n > 1$ un intero e $z_n = \cos(2\pi/n) + i \sin(2\pi/n)$. A quale gruppo (a voi noto) è isomorfo $G/\langle z_n \rangle$?