Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2003/2004
AL2 - Algebra 2, gruppi, anelli e campi
Tutorato
13 ottobre 2003

1. Provare che l'insieme delle matrici non nulle della forma $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ in $\mathcal{M}2(\mathbb{R})$ è, rispetto al prodotto righe per colonne, un gruppo isomorfo al gruppo moltiplicativo $\mathbb{C}^\star$.

2. Sia $(G,+)$ un gruppo abeliano. Provare che per ogni $m \in \mathbb{Z}$ l'applicazione θ_m definita da $\theta_m(g) = mg$, per ogni $g \in G$, è un omomorfismo di G in se stesso. Se $m > 1$, cosa si può dire della suriettività di θ_m?

3. Siano G un gruppo ed N_1 e N_2 suoi sottogruppi normali. Provare che

1. $N_1 \cap N_2$ è un sottogruppo normale di G;
2. $N_1 N_2$ è un sottogruppo normale di G;
3. se inoltre $N_1 \cap N_2 = \langle e \rangle$, allora per ogni $n_1 \in N_1$ e per ogni $n_2 \in N_2$ si ha che $n_1 n_2 = n_2 n_1$.

4. In A_4 si considerino i seguenti sottogruppi:

1. $H = \langle (12)(34) \rangle$;
2. $V = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$.

Verificare che

1. $H \trianglelefteq V$, $V \trianglelefteq A_4$ e H non è normale in A_4.
2. Stabilire a quali gruppi sono isomorfi A_4/V e V/H.

5. Determinare le classi coniugate di A_4.

1. Calcolare il numero delle classi coniugate di S_6 e per ciascuna classe coniugata scrivere esplicitamente un rappresentante.
2. Trovare un elemento $\tau \in S_6$ tale che

$$\tau(163)(24)\tau^{-1} = (12)(435).$$