Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2003/2004
AL2 - Algebra 2, gruppi, anelli e campi
Tutorato
30 settembre 2003

1. Siano $(G, \star)$ un gruppo e a, b suoi elementi. Provare che $(a \star b)^{-1} = a^{-1} \star b^{-1}$ se e solo se $a \star b = b \star a$.

2. Provare che se G è un gruppo con elemento neutro e e tale che $x \star x = e$ per ogni $x \in G$, allora G è abeliano.

3. Scrivere almeno 4 elementi per ciascuno dei seguenti gruppi ciclici:

1. $18\mathbb{Z}$ rispetto all'addizione;
2. $\{(\frac{1}{3})^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ rispetto alla moltiplicazione;
3. $\{\pi^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ rispetto alla moltiplicazione.

4. Trovare l'ordine del sottogruppo ciclico del dato gruppo generato dall'elemento indicato:

1. il sottogruppo di $\mathbb{Z}_{18}$ generato da $[3]_{18}$;
2. il sottogruppo di $\mathcal{C}_8$ generato da $\cos\frac{3\pi}{2} + i \sin\frac{3\pi}{2}$;

5. Nel gruppo $GL_2(\mathbb{Q})$ sono assegnati gli elementi

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad e \qquad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Determinare l'ordine di a e quello di b e provare che ab è aperiodico.

6. Siano G un gruppo ed a, b suoi elementi tali che $ab = ba$. Provare che se a è di ordine m, b è di ordine n con m ed n primi tra loro, allora ab è di ordine mn.

7. Siano G un gruppo ed H un suo sottoinsieme non vuoto, $\underline{finito}$ e chiuso rispetto alla operazione (binaria) di G. Provare che H è un sottogruppo di G.

8. Provare che per ogni $n \geq 3$ ogni elemento di A_n si può scrivere come prodotto di 3-cicli (cicli di lunghezza 3).