Università degli studi di Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2003/2004
AL2 - Algebra 2, gruppi anelli e campi
Soluzioni
31 ottobre 2004

1 Gruppo Simmetrico

1. Per ogni divisore p, primo, di $Ord(S_4)$ trovare un elemento di ordine p.

   Soluzione 1.1. *I divisori prini di $Ord(S_4)$ sono 2 e 3.*

   (a) Ordine 2: (1,2).
   (b) Ordine 3: (1,2,3).

2. Per quali divisori n di $Ord(S_4)$ esiste un elemento di ordine n ?

   Soluzione 1.2. *I divisori di $Ord(S_4)$ sono 1, 2, 3, 4, 6 e 8.*

   (a) Ordine 1: identità.
   (b) Ordine 2: (1,2).
   (c) Ordine 3: (1,2,3).
   (d) Ordine 4: (1,2,3,4).
   (e) Ordine 6 e 8: non ci sono.

3. Verificare l'equazione delle classi per S_4 e S_3.

   Soluzione 1.3. *L'equazione delle classi è*

$$Ord\left(G\right) = \sum \frac{Ord\left(G\right)}{Ord\left(C\left(a\right)\right)}$$

   dove la somma è estesa ad elementi $a \in G$, uno per ogni classe di coniugio.Nel caso di S_3 si ottiene.

$$\begin{aligned} 6 = Ord\left(S_3\right) &= \frac{Ord\left(S_3\right)}{Ord\left(C\left(id\right)\right)} + \frac{Ord\left(S_3\right)}{Ord\left(C\left((1,2)\right)\right)} + \frac{Ord\left(S_3\right)}{Ord\left(C\left((1,2,3)\right)\right)} \\ &= \frac{6}{6} + \frac{6}{3} + \frac{6}{2} = 1 + 2 + 3. \end{aligned}$$

   Analogamente per S_4.

4. Dimostrare che due qualsiasi sottogruppi di ordine 3 di S_4 sono coniugati.

Soluzione 1.4. *I sottogruppi di ordine 3 in S_4 sono:*

(a) $< (1,2,3) >$

(b) $< (1,2,4) >$

(c) $< (1,3,4) >$

(d) $< (2,3,4) >$.

Allora

(a) $< (1,2,4) >= (34) < (1,2,3) > (34)$

(b) $< (1,3,4) >= (23)(34) < (1,2,3) > (34)(23) = (234) < (1,2,3) > (243)$

(c) $< (2,3,4) >= (12)(23)(34) < (1,2,3) > (34)(23)(12) = (1234) < (1,2,3) > (1432)$.

Poichè il coniugio è una relazione di equivalenza abbiamo che due qualsiasi sottogruppi di ordine 3 sono coniugati.

2 Omomorfismi

1. Siano G e G' due gruppi di ordine primo fra loro, dimostrare che l'unico omomorfismo fra G e G' è quello banale.

   Soluzione 2.1. *Sia $g = Ord(G)$ e $g' = Ord(G')$ allora $MCD(g, g') = 1$ Sia ϕ un omomorfismo fra G e G', sia $H = \ker(\phi)$. Allora abbiamo tre possibilità.*

   (a) $H = 0$*: cioè ϕ è iniettiva $\Rightarrow g|g'$ assurdo.*

   (b) $H \subset G$*: cioè $G' \cong G/H \Rightarrow g' \cdot h = g$ assurdo.*

   (c) $H = G$*: cioè ϕ è l'omomorfismo banale.*

2. Trovare tutte gli omomorfismi fra $\mathbb{Z}_n$ e $\mathbb{Z}_m$:

   (a) per m e $n = 2, 3, 4, 5$

   (b) per m e n qualsiasi.

   Soluzione 2.2. *Consideriamo il caso generale. Sia ϕ un omomorfismo fra $\mathbb{Z}_n$ e $\mathbb{Z}_m$, poniamo $H = \ker(\phi)$ e $I = \mathit{Im}(\phi)$. Sia $h = Ord(H)$ e $i = Ord(I)$, allora*

   (a) $n = a \cdot h$ *perchè* $H < \mathbb{Z}_n$

   (b) $m = b \cdot i$ *perchè* $I < \mathbb{Z}_m$

   (c) $i = \frac{n}{h}$ *perchè* $I \cong \mathbb{Z}_n/H$

Da cui abbiamo che $a = i$ *e* $b = h\frac{m}{n} \Rightarrow I = h\frac{m}{n}\mathbb{Z}_m$. *Dunque abbiamo un omomorfismo* $\Leftrightarrow h\frac{m}{n} \in \mathbb{N}$.

3. Trovare tutti gli omomorfismi fra S_3 e $(\mathbb{Z}_6, +)$

   Soluzione 2.3. *I possibili nuclei sono i sottogruppi normali di* S_3, *cioè* S_3, A_3 *e* $\{id\}$. *Dunque abbiamo tre possibilità:*

   (a) $\ker(\phi) = S_3$: *dunque* ϕ *è l'omomorfismo nullo.*

   (b) $\ker(\phi) = A_3$: *dunque per il teorema di omomorfismo* $\phi(S_3) \cong S_3/A_3 \cong \mathbb{Z}_2 \cong 3\mathbb{Z}_6$. *Per cui*

   $$\phi(\sigma) = \begin{cases} 0 & se\ \sigma\ \grave{e}\ pari \\ 3 & se\ \sigma\ \grave{e}\ dispari \end{cases}$$

   (c) $\ker(\phi) = \{id\}$: *dunque* ϕ *è iniettiva, ma* $|S_3| = |\mathbb{Z}_6|$, *dunque* ϕ *è surriettiva. Ma non può essere un omomorfismo di gruppi perchè* $\mathbb{Z}_6$ *è commutativo, mentre* S_3 *non è commutativo.*

4. Sia ϕ un automorfismo di G, dimostrare che $\phi(Z(G)) \subset Z(G)$.

   Soluzione 2.4. *Sia* $g \in Z(G)$ *allora* $\forall x \in G$ $x = gxg^{-1}$ *dunque*

   $$\phi(x) = \phi(gxg^{-1}) = \phi(g)\phi(x)\phi(g^{-1}).$$

   Poichè ϕ *è un automorfismo, e dunque un isomorfismo, abbiamo che*

   $$x = \phi(g)x\phi(g^{-1}).$$

   Dunque $\phi(x) \in Z(G) \forall x \in Z(G)$.

3 Gruppi

1. *Prodotto semidiretto* Sia G un gruppo, H e N sottogruppi con N normale. Sia γ_x la coniugazione per l'elemento $x \in G$.

   (a) Dimostrare che $x \mapsto \gamma_x$ induce un omomorfismo $f : H \mapsto Aut(N)$

   (b) Se $H \cap N = \{e\}$, dimostrare che la applicazione $H \times N \mapsto HN$ data da $(x, y) \mapsto xy$ è una biezione, e che questa applicazione è un isomorfismo se e solamente se f è triviale, i.e. $f(x) = id_N$ $\forall x \in H$.

   Diremo che G è il *prodotto semidiretto* di H e N, e scriviamo $G = N \times_f H$ se $G = HN$ e $H \cap N = \{e\}$.

(c) Viceversa siano H e N due gruppi, e sia $\phi : H \mapsto Aut(N)$ un omomorfismo dato. Costruiamo il prodotto semidiretto nel modo seguente. Sia G l'insieme delle coppie (x, h) con $x \in N$ e $h \in H$, definiamo il prodotto nel modo seguente:

$$(x, h)(y, k) = (x\phi(h)(y), hk)$$

Dimostrare che questa è una legge di gruppo e che $G = N \times_\phi H$ identificando N con $(x, 1)$ e H con $(1, h)$

(d) Verificare che $N \times_{id} H \cong N \times H$.

Soluzione 3.1. *...*

2. Dire quale dei seguenti gruppi è esprimibile come prodotto diretto o semidiretto di due sottogruppi:

   (a) $(\mathbb{Z}, +)$,

   (b) $(\mathbb{Z}_8, +)$,

   (c) $(D_4, \circ)$,

   (d) $(\mathbb{Z}_6, +)$,

   (e) $(\mathbb{C}, +)$,

   (f) $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

Soluzione 3.2. *(a)* $(\mathbb{Z}, +)$ *no,*

(b) $(\mathbb{Z}_8, +)$ *no,*

(c) $(D_4, \circ) \cong < \sigma > \times_\phi < \rho >$ *dove* ρ *è la rotazione di angolo* $\frac{\pi}{2}$, σ *è il ribaltamento orizzontale e* ϕ *è l'omomorfismo da* $< \sigma >$ *a* $Aut(< \rho >)$ *tale che* $\phi(\sigma)(x) = \sigma x \sigma^{-1}$,

(d) $(\mathbb{Z}_6, +) \cong < 3 > \times < 2 >$,

(e) $(\mathbb{C}, +) \cong \mathbb{R} \times i\mathbb{R}$,

(f) $(\mathbb{C}^*, \cdot) \cong \mathbb{R}^+ \times \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

3. Un sottogruppo C di un gruppo G si dice *caratteristico* se $\phi(C) \subseteq C$ per ogni automorfismo ϕ di G. Dimostrare che:

   (a) ogni sottogruppo caretteristico è normale in G, e che il viceversa è falso,

   (b) G', sottogruppo derivato, è caratteristico.

Soluzione 3.3. *(a) Sia* C *un sottogruppo caratteristico, allora*

$$gCg^{-1} = \phi_g(C) \subset C$$

perchè ϕ_g *è un automorfismo. Dunquè* C *è normale. Per vedere che il viceversa è falso prendiamo* $G = D_4$ *e* $C = \left\{id, r, \rho^2, r\rho^2\right\}$ *Allora* C *è normale ma non caratteristico, trovare l'automorfismo tale che* $\phi(C) \not\subset C$.

(b) *Sia ϕ un automorfismo di G. Dimostriamo che ϕ manda i generatori, di G', in generatori. Infatti*

$$\phi(xyx^{-1}y^{-1}) = \phi(x)\phi(y)\phi(x^{-1})\phi(y^{-1})$$

Dunque G' è caratteristico.

4. Con metodi elementari si studi la struttura dei possibili gruppi di ordine 1,2,3,4.

Soluzione 3.4. *Utilizziamo la notazione moltiplicativa. Poichè un gruppo possiede sempre l'elemento neutro, e, abbiamo che $Ord(G) = 1 \Rightarrow G = \{e\}$. Se $Ord(G) = 2$ allora $G = \{e, a\}$ e, poichè ogni elemento ha un inverso, si ha che $a = a^{-1}$. Se $Ord(G) = 3$ allora $G = \{e, a, b\}$,deve risultare $ab = e = ba$; infatti non può essesre $aa = e$ altrimenti $\{e, a\}$ è un sottogruppo di ordine 2 in un gruppo di ordine 3.Inoltre, dalla chiusura dell'operazione risulta $aa = b$ e $bb = a$. Se $Ord(G) = 4$ allora $G = \{e, a, b, c\}$, se $aa = b$ (analogamente se $aa = c$) allora $a^3 = ab = ba = c$, infatti se fosse $ab = e$ allora $\{e, a, b\}$ sarebbe un sottogruppo di G. Pertanto dalla chiusura dell'operazione deve risultare $a^4 = e$, $a^{-1} = c$ e $b^{-1} = b$. L'altra possibilità è che $aa = bb = cc = e$ e pertanto il prodotto fra due di questi elementi darà come risultato il terzo.*

5. Si verifichi il teorema di Cayley per G gruppo ciclico di orine 4 e G gruppo di Klein.

Soluzione 3.5. *Il teorema di Caylay dice che ogni gruppo si può realizzare come gruppo di trasformazioni. Applicando il teorema otteniamo*

(a) $\mathbb{Z}_4 \cong \{id, (1,2,3,4), (1,3)(2,4), (1,4,3,2)\}$
(b) $\mathbb{K} \cong \{id, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(3,2)\}$

4 Gruppo Diedrale

1. Consideriamo D_4 il gruppo dei movimenti rigidi del quadrato.
   (a) Trovare tutti i sottogruppi di D_4,
   (b) Trovare le classi di coniugio di D_4.

Soluzione 4.1. *(a) Sia ρ la rotazione di angolo $\pi/4$ e r la riflessione rispetto all'asse x. Allora*

$$D_4 = \left\{id, r, \rho, r\rho, r\rho^2, r\rho^3, \rho^2, \rho^3\right\}$$

I sottogruppi sono

$$
\begin{aligned}
Z &= \left\{id, \rho, \rho^2, \rho^3\right\} \\
K_1 &= \left\{id, r, \rho^2, r\rho^2\right\} \\
K_2 &= \left\{id, r\rho, \rho^2, r\rho^3\right\} \\
R_1 &= \left\{id, \rho^2\right\} = Z\left(D_4\right) \\
R_2 &= \{id, r\} \\
R_3 &= \{id, r\rho\} \\
R_4 &= \left\{id, r\rho^2\right\} \\
R_3 &= \left\{id, r\rho^3\right\}
\end{aligned}
$$

(b) *Osserviamo che* $\rho r = r\rho^3$. *Le classi di coniugio sono*

$$
\begin{aligned}
C(r) &= \left\{r, r\rho^2\right\} \\
C(r\rho) &= \left\{r\rho, r\rho^3\right\} \\
C(\rho) &= \left\{\rho, \rho^3\right\} \\
C\left(\rho^2\right) &= \left\{\rho^2\right\}
\end{aligned}
$$

2. Determinare il centro di D_n per ogni n.

   Soluzione 4.2. (a) *n dispari:* $Z(D_n) = \{id\}$

   (b) *n dispari:* $Z(D_n) = \left\{id, \rho^{\frac{n}{2}}\right\}$ *dove* ρ *è lo rotazione di angolo* $\frac{2\pi}{n}$.

3. Determinare $N(D_4)$ in S_4.

   Soluzione 4.3. $N(D_4) = \langle (2,4), (1,2)(3,4), (1,4)(2,3) \rangle$.

4. Dimostrare che D_n è generato da una riflessione e da una rotazione.

   Soluzione 4.4. *Sia* ρ *la rotazione di angolo* $2\pi/n$, *sia* $Z = \langle \rho \rangle$. *Osserviamo che* Z *ha indice due, dunque è un sottogruppo normale, sia* r_0 *un elemento non congruo a* ρ, *in particolare* r_0 *ha ordine 2. Sia* $x \in D_n$ *abbiamo due possibilità:*

   (a) $x \mod Z = 1$, *dunque* $x = \rho^i$ *per qualche i.*

   (b) $x \mod Z = -1$ *dunque* $x = \rho^i r_0 \rho^i$ *per qualche i*

   Dunque D_n *è generato da* ρ *e* r_0.

5. Si dimostri che il gruppo dei movimenti di un rettangolo è il gruppo di Klein.

   Soluzione 4.5. *I movimenti del rettangolo sono dati da i ribaltamenti rispetto all'asse orizzontale, verticale, e la rotazione di angolo* π. *Ogni elemento ha ordine 2, da cui l'isomorfismo.*

5 Matrici

1. Sia M l'insieme delle matrici 3×3 a valori 0 e 1 e tali che ciascuna riga e ciascuna colonna contiene esattamente un 1. Si dimostri che rispetto al prodotto righe per colonne M è un gruppo e che esso è isomorfo a S_3.

   Soluzione 5.1.
$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \right.$$
$$\left. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

   Consideriamo $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *e* $b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *È facile verificare che a ha ordine 2, b ha ordine 3 e che a e b generano M. Per costrire l'isomorfismo ricordiamoci che* S_3 *è generato da* $(1,2)$ *e* $(1,2,3)$. *Allora poniamo:* $\phi(a) = (1,2)$ *e* $\phi(b) = (1,2,3)$.

2. Consideriamo l'insieme R delle matrici 2×2 della forma $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ per $\theta \in [0, 2\pi)$. Dimostrare che R è un gruppo rispetto al prodotto righe per colonne e che esso è isomorfo a $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$

   Soluzione 5.2. *Ricordiamo le formule di addizione per il coseno e il seno.*
$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta). \end{aligned}$$

   Allora
$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) & \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) \\ -(\sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)) & \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta) \\ -\sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

   Dunque R *è un gruppo rispetto al prodotto righe per colonne. L'isomorfismo è dato da* $\phi\left(\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}\right) = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$.