1. (a) $f = (1, 3, 5, 7, 9, 11, 13)(2, 4, 6, 8, 10, 12)$ dunque
   - $Ord(f) = mcm(6, 7) = 42$
   - è diapari
   - la classe coniugata di f è data dalla sua struttura ciclica (- - - - - -)(- - - - - - -).

   (b) $g = (1, 4, 2, 7, 13, 9, 6, 12)(3, 10, 8, 5, 14, 11)$ dunque
   - $Ord(g) = mcm(6, 8) = 24$
   - è diapari
   - la classe coniugata di g è data dalla sua struttura ciclica (- - - - - -)(- - - - - - - -).

2. (a) $n \in Z_{18}$ è un generatore $\Leftrightarrow mcd(n, 18) = 1$, dunque i generatori sono 1, 5, 7, 11, 13, 17.

   (b) Poichè 6 divide 18 abbiamo che $\mathbb{Z}_{18}$ ha un sottogruppo di ordine 6, sia K questo sottogruppo. Allora

   $$K = \{0, 3, 6, 9, 12, 15\}$$

   (c) Poiché H ha indice 12, si ha $Ord(H) = 18 \Rightarrow H \cong \mathbb{Z}_{18}$ e $n \in H$ è un generatore di H $\Leftrightarrow \frac{n}{12}$ è un generatore di $\mathbb{Z}_{18}$

   (d) Poiché 54 divide 216, ci sono esattamente $\varphi(54)$ omomorfismi surriettivi.

3. (a) ρ è compatibile con il prodotto ses $x\rho y$ e $w\rho z \Rightarrow xw\rho yz$. Ricordiamo che $|x|\,|y| = |xy|$, da cui la compatibilità.

   (b) $[1]_\rho = \mathbb{R}^+$

   (c) $\phi(z) = z/|z|$

4. (a) Ovvio

   (b) iniettivita ovvia surriettività data da

   $$\frac{1}{q} f(p) = f(\frac{p}{q}).$$

5. (a) $Ord(T) = 8$ e T è un sottogruppo perché è finito e chiuso rispetto al prodotto.

(b) I divisori di $Ord(T) = 8$ sono 1, 2, 4, 8.

Ordine 1: $Id.$

Ordine 2: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Ordine 4: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Ordine 8: Nessuno.

(c) $Z(T) = \left\{ Id, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

(d) Poniamo

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che ρ e σ generano T. Allora, i sottogruppi di ordine 2 sono

$$\{Id, \sigma\}$$
$$\{Id, \sigma\rho\}$$
$$\left\{Id, \sigma\rho^2\right\}$$
$$\left\{Id, \sigma\rho^3\right\}$$
$$\left\{Id, \rho^2\right\}.$$

I sottogruppi di ordine 4 sono:

$$\begin{aligned} A &= \left\{Id, \rho, \rho^2, \rho^3\right\} \cong \mathbb{Z}_4 \\ K_1 &= \left\{Id, \sigma, \rho^2, \sigma\rho^2\right\} \cong K \\ K_2 &= \left\{Id, \sigma\rho, \rho^2, \sigma\rho^3\right\} \cong K. \end{aligned}$$

Dove K è il gruppo di Klein. I sottogruppi normali sono $Z(T)$, perché il centro è sempre normale, A, K_1 e K_2, perchè hanno indice 2. I gruppi omomorfi a T sono

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_2 &\cong T/A \cong T/K_i \\ K &\cong T/Z(T). \end{aligned}$$

(e) Ricordiamo che D_4 è generato da una riflessione, s, e una rotazione, r. Definiamo l'isomorfismo nel modo seguente, $\phi : T \to D_4$, $\phi(\sigma) = s$ e $\phi(\rho) = r$. Rimane da verificare che l'applicazione è ben definita, cioé che $\phi(\sigma\rho) = sr$, e che è iniettiva. La surriettività è ovvia, poiché T e D_4 hanno la stessa cardinalità.