Università degli studi di Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2003/2004
AL2 - Algebra 2, gruppi anelli e campi
Esercizi
12 Dicembre 2004

1 Anelli e Ideali

1. Dati due anelli R e R', introdurre una struttura di anello nel prodotto cartesiano $R \times R'$.

2. Sia R un anello tale che $a^2 = a \ \forall a \in R$; dimostrare che R è commutativo.

3. Siano I e J due ideali di un anello R tali che $I \cap J = \{0\}$; dimostrere che, $\forall h \in I$ e $\forall k \in J$, risulta $hk = 0$.

4. Si studi la relazione di inclusione nell'insieme degli ideali degli anelli $\mathbb{Z}_{101}$ e $\mathbb{Z}_{90}$; dire quali fra gli ideali sono massimali e quali minimali. Determinare i quozienti relativi agli ideali massimali e minimali.

2 Anelli e Anelli di polinomi

1. Dimostrare che se R un anello commutativo con identità, anche $R[x]$ lo è

2. Dimostrare che $R[x_1, \cdots, x_n] = R[x_{i_1}, \cdots, x_{i_n}]$ con $(i_1, \cdots, i_n)$ una permutazione di $(1, \cdots, n)$

3. Sia R un anello commutativo con identità, dimostrare che $f(x) = a_0 + \cdots + a_n x^n \in R[x]$ è invertibile in $R[x]$ se e solo se a_0 è invertibile in R e a_i per $i \neq 0$ sono elementi nilpotenti di R.

4. Dimostrare che l'ideale generato da x in $\mathbb{Z}[x]$ non è massimale; è primo ?

5. Dimostrare che l'ideale generato da x in $\mathbb{R}[x]$ è massimale.

6. Trovare una condizione necessaria e sufficente affinché l'ideale generato da x sia massimale in $R[x]$.

7. Trovare una condizione necessaria e sufficente affinché l'ideale generato da x sia primo in $R[x]$.

8. Sia F un campo, dimostrare che $F[x]$ è euclideo.

3 Anelli Noetheriani

1. Sia R un anello commutativo con identità, dimostrare che sono equivalenti le seguenti affermazioni:
   (a) Ogni ideale di R è finitamente generato
   (b) Siano $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, I_i ideali in R, tali che:
   $$I_0 \subset \cdots \subset I_n \subset \cdots$$
   allora esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che
   $$I_n = I_{n_0} \forall n \geq n_0$$

   Un anello R che verifica una di queste condizioni equivalenti si dice *noetheriano.*

2. Verificare che i seguenti anelli sono noetheriani:
   (a) $R = \mathbb{Z}$
   (b) $R = \mathbb{Q}$
   (c) $R = \mathbb{R}$
   (d) $R = \mathbb{C}$
   (e) $R = \mathbb{C}[x]$

4 Anelli di polinomi su UFD

1. Sia R un dominio a fattorizzazione unica (UFD). Dimostrare che:
   (a) $\forall a, b \in R$
      i. $\exists m = MCD(a, b)$
      ii. Se $m = MCD(a, b) = 1$ e $a|bc \Rightarrow a|c$
   (b) Sia $a \in R$ irriducibile. Se $a|bc \rightarrow a|b$ o $a|c$

2. Dato $f \in R[x]$, il *divisore* di f è
   $$d(f) = MCD(a_0, \cdots, a_n)$$
   dove $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, un polinomio si dice *primitivo* se $d(f) = 1$). Dimostrare che:
   (a) $d(f)$ è unico a meno di un fattore invertibile in R.
   (b) $\forall f \in R[x]$, posto $a = d(f)$ esiste $f_1 \in R[x]$ primitivo tale che
   $$f(x) = af_1(x)$$

(c) la decomposizione precedente è unica a meno di elementi invertibili in R.

Dedurre il seguente

Lemma 1. *Sia R un UFD allora*

(a) Dati $f, g \in R[x]$ allora $d(fg) = d(f)d(g)$ a meno di elementi invertibili

(b) il prodotto di due polinomi primitivi di $R[x]$ è ancora un polinomio primitivo.

(c) Dati $f_1, \cdots, f_n \in R[x]$ allora $d(f_1 \cdots f_n) = d(f_1) \cdots d(f_n)$ a meno di elementi invertibili

3. *Lemma di Gauss* poiché R è un UFD, R è un dominio di integrita, dunque ammette un campo dei quozienti F. Possiamo considerare $R[x]$ come sottoanello di $F[x]$. Dimostrare che, dato un polinomio $f(x) \in F[x]$, si ha
$$f(x) = \frac{f_0(x)}{a}$$
con $f_0(x) \in R[x]$ e $a \in R$. Vogliamo ora copire la relazione fra la riducibilità in $R[x]$ e la riducibilità in $F[x]$.

Lemma 2. *Sia $f(x) \in R[x]$ primitivo, allora $f(x)$ è irriducibile in $R[x] \Leftrightarrow f(x)$ è irriducibile in $F[x]$.*

Lemma 3. *Se R è un UFD e se $p(x)$ è un polinomio primitivo in $R[x]$, allora $p(x)$ si può fattorizzare in modo unico come prodotto di elementi irriducibili di $R[x]$.*

4. Dimostrare

Teorema 4. *Se R è un UFD, anche $R[x]$ lo è.*

Corollario 5.

(a) Se R è un UFD, anche $R[x_1, \cdots, x_n]$ lo è.

(b) Se F è un campo, allora $F[x_1, \cdots, x_n]$ è un UFD.

5 Omomorfismi di Anelli

1. Sia I l'ideale generato da $f(x) = x - a$ in $\mathbb{R}[x]$, descrivere $\mathbb{R}[x]/I$ e l'applicazione π da $\mathbb{R}[x]$ in $\mathbb{R}[x]/I$.

2. *omomorfismo di valutazione* Sia R un anello commutativo con identità, consideriamo $\forall r \in R$
$$\pi_r : R[x] \to R$$
definito da $\pi_r(f) = f(r)\ \forall f \in R[x]$. Calcolare l'immagine e il nucleo.

3. Dimostrare che un omomorfismo di un campo è o un isomorfismo o porta tutti gli elementi in zero.

4. Si determinino, a meno di isomorfismo, tutte le immagini omomorfe degli anelli $\mathbb{Z}_6$ e $\mathbb{Z}_{13}$.

6 Anelli Locali

1. Un anello R commutativo con unità si dice *locale* se ha un solo ideale massimale. Verificare se i seguenti anelli sono locali:
   (a) $\mathbb{Z}$
   (b) $\mathbb{R}$
   (c) $\mathbb{Z}[x]$
   (d) $\mathbb{R}[x]$
   (e) $A = \left\{ \frac{m}{n} : 3 \nmid n,\ m, n \in \mathbb{Z} \right\} \subset \mathbb{Q}$

2. Sia R un anello locale con ideale massimale M, $\mathfrak{k} = R/M$ si chiama *campo residuo* di R. Calcolare i campi residui per gli anelli locali dell'esercizio precedente.

7 Fattorizzazione

1. Dimostrare che in $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right]$ non esiste il massimo comun divisore di 9 e $3\left(2+\sqrt{-5}\right)$.

2. Dimostrare che gli elementi ± 2,± 5,$\pm\left(2+\sqrt{-6}\right)$ sono irriducibili ma non primi in $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-6}\right]$.

3. Studiare la riducibilità del polinomio $x^2 - 2$ su $\mathbb{Z}_{11}$ e su $\mathbb{Z}_{13}$.

4. Calcolare, se esiste, il MCD e il mcm delle seguenti coppie
   (a) 2 e $6+\sqrt{d}$
   (b) 5 e $12+4\sqrt{d}$
   (c) 3 e $2+5\sqrt{d}$

   in $\mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right]$, per $d = -1, 3$.

5. Determinare l'ideale generato dalle seguenti coppie di polinomi

   (a) $x^3 - x$ e $2x^2 + 4x + 4$.

   (b) $3x - 3$ e $6x^2 + 12x + 3$

   in $\mathbb{Z}_5[x]$, $\mathbb{Z}[x]$ e $\mathbb{Q}[x]$.