Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2004/2005
AL3 - Fondamenti di Algebra Commutativa
Esercizi 4 - Anelli Noetheriani e chiusura integrale

1. Siano M un R-modulo ed $f : M \longrightarrow M$ un omomorfismo di R-moduli. Provare che:

   (a) Se M è Noetheriano ed f è suriettivo, allora f è un isomorfismo.

   (b) Se M è Artiniano ed f è iniettivo, allora f è un isomorfismo.

   (Sugg: Per (a) considerare i sottomoduli $\mathrm{Ker}(f^n)$; per (b) considerare i moduli quoziente $M/\operatorname{Im}(f^n)$).

2. Siano M un R-modulo ed N_1 e N_2 sotto-R-moduli di M. Provare che se $\frac{M}{N_1}$ e $\frac{M}{N_2}$ sono Noetheriani, allora anche $\frac{M}{N_1 \cap N_2}$ è Noetheriano. Analogamente per Artiniano al posto di Noetheriano.

3. Sia M un R-modulo Noetheriano, provare che $R/\operatorname{Ann}(M)$ è un anello Noetheriano. Stabilire se si può sostituire Artiniano a Noetheriano.

4. Sia R un anello Noetheriano ed $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in R[[X]]$. Provare che f è nilpotente se e solo se ogni a_n è nilpotente.

5. Sia K un campo; nell'anello $K[X, Y, Z]$ siano $P_1 = (X, Y)$, $P_2 = (X, Z)$ ed $M = (X, Y, Z)$. Sia $I = P_1 P_2$. Provare che $I = P_1 \cap P_2 \cap M^2$ è una decomposizione primaria minimale di I; stabilire quali sono i primi isolati e quelli immersi.

6. Sia R un anello commutativo ed u un elemento invertibile di un anello S contenente R.

   (a) Provare che u^{-1} è intero su R se e solo se $u^{-1} \in R[u]$.

   (b) Provare che $R[u] \cap R[u^{-1}]$ è intero su R.
   (Sugg. : sia $s \in R[u] \cap R[u^{-1}]$; allora $s = r_0 + \cdots + r_m u^m = t_0 + \cdots + t_n u^n$ con $r_0, \cdots, r_m, t_0, \cdots, t_n \in R$. Si consideri lo R-modulo generato da $\{1, u, \cdots, u^{m+n-1}\}$.

7. Sia D un dominio d'integrità, P un ideale primo non nullo di D finitamente generato contenuto propriamente in I. Sia x un elemto del campo dei quozienti di D tale che $xI \subseteq D$. Provare che x è intero su D.

8. Determinare la chiusura integrale di $\mathbb{Z}[2i]$.

9. Siano $R \subseteq S$ anelli con S intero su R. Provare che :

   (a) Se $x \in R$ è invertibile in S, allora x è invertibile in R.

   (b) Il radicale di Jacobson di R è la contrazione in R del radicale di Jacobson di S.

10. Sia K un campo; la $K[X^2]$-algebra $K[X]$ è finita e pertanto l'estensione anulare $K[X^2] \subset K[X]$ è intera. Trovare una relazione di dipendenza integrale per ogni $f(X) \in K[X]$.

11. Sia K un campo ed R l'anello delle serie formali

    del tipo $a_0 + a_2X^2 + a_3X^3 + \cdots$.

    (a) Provare che R non è integralmente chiuso.

    (b) Determinare la chiusura integrale di R.