Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2004/2005
AL3 - Fondamenti di Algebra Commutativa
Esercizi 1 - Moduli

Nel seguito R denota un anello unitario non nullo.

1. Sia R un anello commutativo, siano I e J ideali di R. Provare che R/I e R/J sono R-moduli isomorfi se e solo se $I = J$. Cosa si può dire per gli anelli R/I e R/J ?

2. Siano M un R-modulo ed A, B e C suoi sottomoduli. Provare che se $C \subseteq A$, allora
$$A \cap (B + C) = (A \cap B) + C.$$
Questa uguaglianza è nota come "legge modulare".
Provare, con un esempio, che questa formula non sussiste se C non è contenuto in A.

3. Sia $R = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; si consideri R come R-modulo; sia $x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; trovare $\mathrm{Ann}(x)$ e $\mathrm{Ann}(\langle x \rangle)$.

4. Provare che il sottoanello $\mathbb{Z}[\frac{p}{q}]$ di $\mathbb{Q}$ non è finitamente generato come $\mathbb{Z}$-modulo se $\frac{p}{q} \notin \mathbb{Z}$.

5. Sia K un campo. Sia $R \subseteq K[X]$ il sottoanello
$$R = \left\{ f(X) \in K[X] \quad | \quad f(X) = a_0 + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n \right\}.$$
Provare che $K[X]$ è un R-modulo finitamente generato, libero da torsione e non libero.

6. Siano M un R-modulo ed f un endomorfismo di M tale che $f \circ f = f$. Provare che
$$M \cong (\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)).$$

7. Sia R un anello commutativo; si consideri $R[X]$ come R-modulo; allora $N = R[X^2]$ è un R-sottomodulo di M. Provare che $M/N \cong R[X]$ come R-moduli.

8. Sia $u = (a, b) \in \mathbb{Z}^2$.
   (a) Provare che esiste una base di $\mathbb{Z}^2$ contenente u se e solo se a e b sono coprimi.

(b) Sia $u = (5, 12)$; trovare $v \in \mathbb{Z}^2$ tale che (u, v) è una base di $\mathbb{Z}^2$.

9. Provare che se F_1 ed F_2 sono R-moduli liberi, allora anche $F_1 \oplus F_2$ è un R-modulo libero.

   Provare che la somma diretta di una qualsiasi famiglia di R-moduli liberi è un modulo libero.

10. Siano N_1 ed N_2 sottomoduli di un R-modulo M. Verificare che la seguente successione di R-moduli :

$$0 \to N_1 \cap N_2 \xrightarrow{\varphi} N_1 \oplus N_2 \xrightarrow{\psi} N_1 + N_2 \to 0$$

   dove $\varphi(x) = (x, x)$ e $\psi(x, y) = x - y$, è esatta.

11. Siano D un dominio di integrità ed a e b elementi non nulli di D. Siano $M = D/(ab)$ed $N = (a)/(ab)$. Allora M è un D-modulo ed N un suo sottomodulo. Provare che N è un addendo diretto di M se e solo se esistono $c, d \in D$ tali che $ca + db = 1$.