Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2013/2014
TN410 - Introduzione alla teoria dei numeri
Esercitazione 1
7 marzo 2014

1. Provare che se n è un intero positivo, allora:

$$\varphi(2n) = \begin{cases} \varphi(n) & \text{se } n \text{ è dispari} \\ 2\varphi(n) & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

2. Sia n un intero positivo. Provare che:
   (a) $\varphi(3n) = 3\varphi(n)$ se e solo se 3 divide n;
   (b) $\varphi(3n) = 2\varphi(n)$ se e solo se 3 non divide n;
   (c) $\varphi(n) = \frac{n}{2}$ se e solo se $n = 2^k$ per qualche $k \geqslant 1$.

3. Dimostrare che se m e k sono interi positivi, allora

$$\varphi(m^k) = m^{k-1}\varphi(m)$$

4. (a) Provare che se p è un numero primo tale che $2p + 1$ non è primo, allora non esiste alcun numero naturale n tale che $\varphi(n) = 2p$.
   (b) Provare che non esiste alcun numero naturale n tale che $\varphi(n) = 14$ e che 14 è il più piccolo intero positivo pari con questa proprietà.

5. Siano $n,\ m$ numeri interi $\geqslant 2$; provare che se ogni numero primo che divide n divide anche m, allora $\varphi(nm) = n\varphi(m)$.

6. (a) ($\star$) Sia k un numero intero positivo; provare che l'insieme dei numeri naturali n tali che $\varphi(n) = k$ è finito.
   (b) Provare che se esiste un solo n_0 tale che $\varphi(n_0) = k$, allora $4|n_0$.

7. Trovare tutte le eventuali soluzioni delle seguenti congruenze:
   (a) $3X + 4Y \equiv 7 \pmod 9$.
   (b) $6X - 4Y \equiv 10 \pmod{14}$.