Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2013/2014
TN410 - Introduzione alla teoria dei numeri
Appello C
13 gennaio 2015

*Cognome*____________________ *Nome*__________________________

*Numero di matricola*____________________

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e **giustificando tutte le affermazioni fatte**. E' consentito l'uso di libri, appunti e calcolatrici.

1. Si consideri il seguente sistema lineare in due indeterminate:

$$\begin{cases} \lambda X + Y \equiv 3\mu \pmod{11} \\ 3X + \lambda Y \equiv 7\mu + 3 \pmod{11} \end{cases}$$

   (a) Stabilire quando, al variare di λ e μ con $0 \leq \lambda,\ \mu \leq 10$, il sistema è risolubile e nei casi in cui è risolubile quante soluzioni ammette.

   (b) Trovare, se esistono, le soluzioni del sistema dato per $4 \leqslant \lambda \leqslant 5$ e $9 \leqslant \mu \leqslant 10$.

2. Siano p e q numeri primi dispari tali che $q = 2p + 1$.
   Provare che:
   (a) -4 è un non-residuo quadratico di q;
   (b) -4 è una radice primitiva di q.

3. (a) Trovare tutte le radici primitive modulo 17.

   (b) Se r è la radice primitiva minima positiva modulo 17, determinare $ind_r(a)$ per ogni $1 \leqslant a \leqslant 16$.

   (c) Trovare per quali valori di a con $1 \leqslant a \leqslant 16$ la congruenza

$$7X^4 \equiv 9a \pmod{17}$$

   è risolubile e per il minimo di questi valori di a risolvere la congruenza data.

4. (a) Determinare tutte le terne pitagoriche **primitive** (x, y, z) con $z = x + 1$.
   (b) Determinare tutte le terne pitagoriche **primitive** (x, y, z) con $z = y + 2$.

5. Sia $n = p_1^{h_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{h_r}$ la fattorizzazione in primi distinti di un numero naturale $n \geqslant 2$ con $h_i \geqslant 1$ per $1 \leqslant i \leqslant r$.

   Sia λ la funzione di *Liouville* definita nel modo seguente:

$$\lambda(n) := \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ \\ (-1)^{\sum_{i=1}^{r} h_i} & \text{se } n = p_1^{h_1} \cdots p_r^{h_r} \end{cases} .$$

   Dimostrare che:

   (a) λ è completamente moltiplicativa;

   (b) $\sum_{d|n} \lambda(d) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è un quadrato} \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

   (c) $\lambda^{-1} = \mu\lambda = |\mu|$;

   (d) $\sum_{d|n} \lambda^{-1}(d) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ \\ 2^r & \text{se } \ n = p_1^{h_1} \cdots p_r^{h_r} \end{cases} .$

6. (a) Scrivere come frazione continua $\frac{691}{71}$;
   (b) calcolarne tutte le convergenti;
   (c) dedurre le soluzioni dell'equazione diofantea

$$691X - 71Y = 17$$