Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2013/2014
TN410 - Introduzione alla teoria dei numeri
Appello B
8 luglio 2014

*Cognome*___________________ *Nome*________________________

*Numero di matricola*___________________

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e **giustificando tutte le affermazioni fatte**. E' consentito l'uso di libri, appunti e calcolatrici.

1. Trovare, al variare del parametro λ ($0 \leq \lambda \leq 12$), le soluzioni del seguente sistema lineare in due variabili:

$$\begin{cases} 3X + \lambda Y \equiv 1 \pmod{13} \\ \lambda X + Y \equiv 3 \pmod{13} \end{cases}$$

2. Determinare tutte le (eventuali) soluzioni della congruenza polinomiale:

$$X^4 + 15X^3 + 6X^2 + 10X + 3 \equiv 0 \pmod{75}.$$

3. Un numero naturale n si dice *perfetto* se $\sigma(n) = 2n$, con $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$.

   Provare che:

   (a) Se p è un numero primo e k un numero naturale $\geqslant 1$, allora p^k non è perfetto.

   (b) Se m è un intero positivo, allora m^2 non è un numero perfetto.

   (c) Il prodotto di due numeri primi dispari distinti non è un numero perfetto.

   (d) Se n è un numero perfetto, allora $\sum_{d|n} \frac{1}{d} = 2$.

4. Sia n un numero intero positivo tale che $2n+1$ è primo. Dimostrare che se $n \equiv 0\ ,\ 3 \pmod 4$, allora $2n+1$ divide $2^n - 1$, mentre se $n \equiv 1\ ,\ 2 \pmod 4$, allora $2n+1$ divide $2^n + 1$.

   (Sugg. : si consideri il simbolo di Legendre $\left(\frac{2}{2n+1}\right)$).

5. (a) Verificare che:

(1) $\frac{382}{73} = [5; 4, 3, 2, 2]$;

(2) $\frac{2365}{382} = [6; 5, 4, 3, 2, 2]$;

(b) Sia $(a_n)_{n \geqslant 0}$ la successione di numeri naturali definita da: $a_0 := 1$, $a_1 := 2$ e $a_n := na_{n-1} + a_{n-2}$ per $n \geqslant 2$.

Provare che per ogni $n \geqslant 2$ si ha:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = [\underbrace{n; n-1, n-2, \cdots, 4, 3, 2, 2}_{n}]$$

6. Sia $\psi : \mathbb{N}^+ \longrightarrow \mathbb{Z}$ la funzione definita da:

$$\psi(n) = \left(\frac{n}{71}\right)\tau(n).$$

(a) Stabilire se ψ è moltiplicativa.

(b) Sia $F = \psi * \sigma$. Calcolare $F(103)$ e $F^{-1}(103)$.

(c) Sia f la funzione aritmetica determinata dalla formula di inversione di Möbius. Calcolare $f(103)$.