Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2012/2013
AL110 - Algebra 1
Tutorato 1 (27 settembre 2012)

1. Sia $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 7 \leq x \leq 77\}$. Siano $B = \{x \in A \mid x = 8n \text{ con } n \in \mathbb{N}\}$ e $C = \{x \in A \mid x = 12m \text{ con } m \in \mathbb{N}\}$.
   Determinare $B \cup C$, $B \cap C$, $B - C$ e $B \times C$.

2. Siano $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0\}$ e $B = \{y \in \mathbb{Z} \mid y^4 - 5y^2 + 4 = 0\}$.
   Determinare $\mathcal{P}(A)$ e $A \times B$.

3. Siano $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 12n \text{ con } n \in \mathbb{Z}\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 40m \text{ con } m \in \mathbb{Z}\}$. Determinare $A \cap B$.

4. Siano r ed s numeri naturali positivi. Siano
$$A_r = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = rn \text{ con } n \in \mathbb{Z}\}$$
$$A_s = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = sm \text{ con } m \in \mathbb{Z}\}.$$
   Determinare $A_r \cap A_s$.

5. Siano X un insieme non vuoto, A e B suoi sottoinsiemi; dimostrare che:
   (a) $A \cap B \subseteq A \cup B$;
   (b) $A \cap B = A \cup B \iff A = B$;
   (c) $\mathcal{C}A \subseteq B$ e $\mathcal{C}A \neq B \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$; è vero il viceversa?
   (d) $\mathcal{C}(A \cap \mathcal{C}B) \cup B = \mathcal{C}A \cup B$;
   (e) $B = (A \cap \mathcal{C}B) \cup (\mathcal{C}A \cap B) \iff A = \emptyset$;
   (f) $A - B = \mathcal{C}B - \mathcal{C}A = A \cap \mathcal{C}B$.
   (g) $A = B \iff \mathcal{C}B = \mathcal{C}A$.

6. Siano X un insieme non vuoto, A, B e C suoi sottoinsiemi; dimostrare che:
   (a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
   (b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
   (c) $A \cap C = \emptyset \Rightarrow A \cap (B \cup C) = A \cap B$;
   (d) $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \iff C \subseteq A$;
   (e) $A \cap B \subset \mathcal{C}C$, $A \cup C \subset B \Rightarrow A \cap C = \emptyset$.

7. Siano $A = \{1, 2, 4, 8, 16\}$, $B = \{2, 3, 5, 7\}$, $C = \{a, b\}$. Trovare $(C \times A) \cap (C \times B)$ e $(A \cap B) \times C)$.

8. Trovare per quali numeri reali x e y si ha che $(2x + 3y, 0) = (2, 4x - y)$.

9. Siano $\mathbf{P}$,$\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R}$ proposizioni; provare che:
   (a) $\neg(\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q})$ e $\mathbf{P} \wedge \neg\mathbf{Q}$ sono equivalenti;
   (b) $\neg(\mathbf{P} \Leftrightarrow \mathbf{Q})$ e $(\mathbf{P} \Leftrightarrow \neg\mathbf{Q})$ sono equivalenti;
   (c) $(\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q})$ e $\big((\mathbf{P} \wedge \neg\mathbf{Q}) \Rightarrow (\mathbf{R} \wedge \neg\mathbf{R})\big)$ sono equivalenti.