Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2012/2013
AL110 - Algebra 1
Tutorato 10 (6 dicembre 2012)

1. Stabilire quali dei seguenti insiemi dotati di due operazioni sono anelli:
   (a) $7\mathbb{Z}$ con le usuali addizione e moltiplicazione;
   (b) l'insieme $\mathbb{R}^\star$ dei numeri reali non nulli con l'operazione di moltiplicazione e con l'operazione $\circ$ definita da $a \circ b = 1$;

2. Calcolare $4a$ e a^4 per gli elementi a dei seguenti anelli:
   (a) $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$;
   (b) $[2]_{16} \in \mathbb{Z}_{16}$;
   (c) $[2]_5 \in \mathbb{Z}_5$.

3. Si consideri l'anello commutativo
$$F = \{0, 1, \alpha, 1 + \alpha\},$$
   dove 0 è l'elemento neutro additivo, 1 è l'elemento neutro moltiplicativo, $x + x = 0$ per ogni $x \in F$ e $\alpha^2 = \alpha + 1$.
   (a) Scrivere la tabella additiva e quella moltiplicativa di F.
   (b) Verificare che F è un campo.

4. Stabilire quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottoanelli:
   (a) $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \ \ | \ \ a, b \in \mathbb{Z}\}$ sottoinsieme di $\mathbb{C}$;
   (b) $\mathbb{Q}[i] = \{a + bi \ \ | \ \ a, b \in \mathbb{Q}\}$ sottoinsieme di $\mathbb{C}$;
   (c) $\{q \in \mathbb{Q} \ \ | \ \ q = \frac{a}{b},\ a, b \in \mathbb{Z},\ b$ dispari e $\mathrm{MCD}(a, b) = 1\}$ sottoinsieme di $\mathbb{Q}$;
   (d) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \ \ | \ \ a, b \in \mathbb{Q}\}$ sottoinsieme di $\mathbb{C}$.

5. Si considerino i seguenti anelli:
   (a) $(\mathbb{Z}_{18}, +, \cdot)$;
   (b) $(\mathbb{Q}[i], +, \cdot)$, con $\mathbb{Q}(i) = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$;
   (c) $(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$, con $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$;
   (d) $\left(\mathbb{Z}^\mathbb{Z} = \{f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \mid f \text{ applicazione}\}, +, \cdot\right)$, con $+, \cdot$ definiti nel seguente modo:
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$$
   $\forall x \in \mathbb{Z},\ \ \forall f, g \in Z^\mathbb{Z}$.

   i) Stabilire quali di essi sono domini d'integrità e quali sono campi.

   ii) Per ciascuno degli anelli dati, determinare la caratteristica e l'insieme (gruppo) degli elementi invertibili.

6. Si consideri l'insieme

$$\mathbb{Z}_5^{\mathbb{Z}_5} := \{f : \mathbb{Z}_5 \longrightarrow \mathbb{Z}_5 \mid f \text{ applicazione}\}$$

   (a) Stabilire quanti sono gli elementi di $\mathbb{Z}_5^{\mathbb{Z}_5}$;
   (b) stabilire quante sono le applicazioni iniettive, quante suriettive e quante biiettive da $\mathbb{Z}_5$ a $\mathbb{Z}_5$.

   In $\mathbb{Z}_5^{\mathbb{Z}_5}$ si considerino le operazioni $+, \cdot$ definite nel seguente modo:

$$(f+g)(x) = f(x) \oplus g(x), \qquad (f \cdot g)(x) = f(x) \odot g(x)$$

   per ogni $f, g \in Z_5^{\mathbb{Z}_5}$, per ogni $x \in \mathbb{Z}_5$ e con $\oplus$ e $\odot$ le usuali addizione e moltiplicazione in $\mathbb{Z}_5$.

   Sapendo che $\left(\mathbb{Z}_5^{\mathbb{Z}_5},\ +,\ \cdot\right)$ è un anello commutativo unitario,

   (a) determinare la caratteristica di $\left(\mathbb{Z}_5^{\mathbb{Z}_5},\ +,\ \cdot\right)$;
   (b) caratterizzare gli elementi invertibili di $\left(\mathbb{Z}_5^{\mathbb{Z}_5},\ +,\ \cdot\right)$;
   (c) dire quanti sono gli elementi invertibili di $\left(\mathbb{Z}_5^{\mathbb{Z}_5},\ +,\ \cdot\right)$;
   (d) provare che un qualunque elemento di $\left(\mathbb{Z}_5^{\mathbb{Z}_5},\ +,\ \cdot\right)$ non nullo e non invertibile è uno zero-divisore.

7. Determinare la caratteristica di $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, $\mathbb{Z}_{31}$ e $\mathbb{Z}_{10}[X]$.

8. Si considerino i seguenti anelli:

   (a) $(\mathbb{Z}_{13}, +, \cdot)$;
   (b) $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$;
   (c) $(\mathbb{Z}_8[X], +, \cdot)$;
   (d) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ con l'addizione e la moltiplicazione definite da:

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d) \quad (a,b)(c,d) = (ac, bd);$$

   (e) $(\mathbb{R}[X], +, \cdot)$;
   (f) $A = \left(\mathbb{R}^{[0,1]} = \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ applicazione}\}, +, \cdot\right)$;
   (g) il sottoanello di $\mathbb{R}^{[0,1]}$ formato dalle funzioni continue.

   (a) Stabilire quali di essi sono domini d'integritá e quali sono campi.
   (b) Per ciascuno dei domini d'integritá D del punto precedente, determinare l'insieme (gruppo) degli elementi invertibili $U(D)$.

9. Determinare la somma e il prodotto dei seguenti polinomi:

   (a) $f(X) = [2]X^5 - [4]X^3 + [2]X + [7]$, $g(X) = [4]X^3 + [3]X^2 + [3]$ in $\mathbb{Z}_8[X]$;
   (b) $f(X) = [3]X^4 + [2]X^3 + [5]X + [6]$, $g(X) = [4]X^3 + [9]X^2 + [11]$ in $\mathbb{Z}_{12}[X]$.

10. Dire quanti sono i polinomi in $\mathbb{Z}_5[X]$ della forma $a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$, cioé quanti elementi ha il sottoinsieme di $\mathbb{Z}_5[X]$ formato dal polinomio nullo e dai polinomi di grado $\leqslant 3$.