Università degli studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica A.A. 2012-2013
AL110 - Algebra 1
Esercitazione n.1 - 3 Ottobre 2012
Antonio Cigliola

Esercizio 1. Siano $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q}$ proposizioni. Dimostrare le seguenti equivalenze logiche:

(i) $\mathbf{P} \wedge \mathbf{P} \equiv \mathbf{P}$;

(ii) $\mathbf{P} \vee \mathbf{P} \equiv \mathbf{P}$ (leggi di idempotenza);

(iii) $\mathbf{P} \vee (\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \equiv \mathbf{P}$;

(iv) $\mathbf{P} \wedge (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \equiv \mathbf{P}$ (leggi di assorbimento);

(v) $\mathbf{P} \wedge (\neg\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \equiv \mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}$;

(vi) $\mathbf{P} \vee (\neg\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \equiv \mathbf{P} \vee \mathbf{Q}$ (leggi del complemento);

(vii) $(\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q}) \equiv (\neg\mathbf{Q} \Rightarrow \neg\mathbf{P}) \equiv (\mathbf{Q} \vee \neg\mathbf{P})$.

Esercizio 2. Siano $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q}$ proposizioni. Dimostrare che le seguenti proposizioni sono tautologie:

(i) $(\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \Rightarrow \mathbf{P}$ (principio di semplificazione);

(ii) $\mathbf{P} \Rightarrow (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q})$ (passaggio all'alternativa);

(iii) $((\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q}) \wedge \mathbf{P}) \Rightarrow \mathbf{Q}$ (modus ponendo ponens);

(iv) $((\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q}) \wedge \neg\mathbf{Q}) \Rightarrow \neg\mathbf{P}$ (modus tollendo tollens);

(v) $(\neg(\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \wedge \mathbf{P}) \Rightarrow \neg\mathbf{Q}$ (modus ponendo tollens);

(vi) $(\neg(\mathbf{P} \Leftrightarrow \mathbf{Q}) \wedge \neg\mathbf{Q}) \Rightarrow \mathbf{P}$ (modus tollendo ponens);

Esercizio 3. Siano $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q}$ proposizioni. Per semplicità di scrittura si ponga $\overline{\mathbf{P}} \overset{\text{def}}{=} \neg\mathbf{P}$. Provare che la seguente proposizione è una tautologia:

$$\overline{\Big(\mathbf{P} \vee \Big(\overline{\mathbf{P}} \wedge \overline{\overline{\mathbf{Q}}}\Big)\Big) \wedge \overline{\mathbf{P}} \wedge \overline{\mathbf{Q}}} \wedge \big(\overline{\mathbf{P}} \vee \overline{\mathbf{Q}} \vee \mathbf{P}\big) \wedge \big(\overline{\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}} \vee \mathbf{Q}\big).$$

Esercizio 4. Siano S e V insiemi. Provare che $S \cap V = \varnothing$ se e solo se $S \subseteq \complement V$.

Esercizio 5. Siano S, V e T insiemi. Provare che $(S \smallsetminus T) \smallsetminus V = S \smallsetminus (T \cup V)$.

Esercizio 6. Siano S, V e T insiemi. Provare che $(S \smallsetminus T) \smallsetminus V \subseteq S \smallsetminus (T \smallsetminus V)$. Provare inoltre con un esempio che gli insiemi $(S \smallsetminus T) \smallsetminus V$ ed $S \smallsetminus (T \smallsetminus V)$ non sono necessariamente uguali. Provare infine che $(S \smallsetminus T) \smallsetminus V = S \smallsetminus (T \smallsetminus V)$ se e solo se S e V sono disgiunti.

Esercizio 7. Usando il principio di induzione, provare che per ogni numero naturale n si ha:

$$\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \ldots \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

Esercizio 8. Usando il principio di induzione, provare che per ogni numero naturale $n \geqslant 3$ si ha:

$$n^2 > 2n + 1.$$

Esercizio 9. Usando il principio di induzione, provare che per ogni numero naturale $n \geqslant 5$ si ha:

$$2^n > n^2.$$