

Università degli studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica A.A. 2012-2013
AL110 - Algebra 1
Esercitazione n.3 - 17 Ottobre 2012
Antonio Cigliola

Esercizio 1. Provare che non esiste alcun numero naturale n tale che $n + 1 = 0$.

Esercizio 2. Provare che non esiste alcun numero intero m per cui si abbia $2m + 1 = 0$.

Esercizio 3. Provare che $\sqrt{2}$ non è un numero razionale.

Esercizio 4. Calcolare:

- (i) $1 + i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 - i^6$;
- (ii) $(1 + i)^2$;
- (iii) $(1 + i)(1 - i)$;
- (iv) $|(1 - i)^6|$;
- (v) $\frac{1}{2-3i}$;
- (vi) $\frac{2-2i}{3+3i}$;
- (vii) $\frac{1-2i}{1+3i} - 7\sqrt{3} + (1 + i\sqrt{3})^2$.

Esercizio 5. Siano z e z' numeri complessi. Provare che

- (i) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$;
- (ii) $\overline{\bar{z}} = z$;
- (iii) $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$;
- (iv) $\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z}'$;
- (v) $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$;
- (vi) $|z^n| = |z|^n$, per ogni $n \in \mathbb{N}^*$.

Esercizio 6. * Si consideri in \mathbb{C} la seguente relazione binaria:

$$\forall z, z' \in \mathbb{C} : z \rho z' \Leftrightarrow z' - z = \overline{z' - z}.$$

Provare che ρ è una relazione di equivalenza e descrivere esplicitamente l'insieme quoziente.