Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2012/2013
AL110 - Algebra 1
Appello X
11 Settembre 2013

*Cognome*____________________ *Nome*__________________________

*Numero di matricola*____________________

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e **giustificando tutte le affermazioni fatte**. Non è consentito l'uso di libri, appunti. E' consentito l'uso della calcolatrice.

1. **(6 pt)**
   (a) Utilizzando il principio di induzione, provare che per ogni numero naturale $n \geq 1$ si ha:
      i. $4^n \equiv 1 + 3n \pmod 9$;
      ii. $5^n \equiv 1 + 4n \pmod{16}$.
   (b) Siano x, y numeri reali qualunque.
   Utilizzando il principio di induzione si dimostri che per ogni numero naturale $n \geq 1$ si ha:
   $$\sum_{k=0}^{n}(x + ky) = \frac{1}{2}(n + 1)(2x + ny)$$

2. **(6 pt)** Sia $\mathbb{R}^\star = \mathbb{R} - \{0\}$. Si consideri l'applicazione $\psi :\ \mathbb{R}^\star \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da:

$$\psi(a) = \max\{a, a^{-1}\}$$

per ogni $a \in \mathbb{R}^\star$.

(a) Verificare che $\psi^{-1}(y) \subseteq \{y, y^{-1}\}$ per ogni $y \in \mathbb{R}^\star$.

(b) Provare che per ogni $y \in \mathbb{R}$ l'insieme $\psi^{-1}(y)$ ha al più due elementi.

(c) Determinare tutti gli $y \in \mathbb{R}$ tali che $\psi^{-1}(y)$ è costituito da un solo elemento.

(d) Stabilire se ψ è iniettiva.

(e) Se ρ_ψ è la relazione nucleo associata a ψ, provare che per ogni $a, b \in \mathbb{R}^\star$ si ha

$$a\rho_\psi b \quad \Longleftrightarrow \quad (a-b)(ab-1) = 0$$

(f) Determinare $\mathtt{Im}(\psi)$.

3. **(6 pt)** Siano X un insieme non vuoto ed A un suo sottoinsieme non vuoto. Siano

$$\mathcal{S}(X) = \{f : X \longrightarrow X \quad | \quad f \text{ è una applicazione biiettiva}\}$$

$$\mathcal{S}_A(X) = \{f \in \mathcal{S}(X) \quad | \quad f(A) = A\}$$

$$\mathcal{S}'_A(X) = \{f \in \mathcal{S}(X) \quad | \quad f(a) = a \text{ per ogni } a \in A\}$$

E' noto che $\mathcal{S}(X)$ è un gruppo rispetto alla composizione di applicazioni $\circ$.

(a) Provare che $\mathcal{S}_A(X)$ e $\mathcal{S}'_A(X)$ sono sottogruppi di $(\mathcal{S}(X), \circ)$.

(b) Se $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ed $A = \{1, 4\}$, elencare gli elementi di $\mathcal{S}_A(X)$ e di $\mathcal{S}'_A(X)$ rappresentandoli come prodotto di cicli disgiunti.

(c) Se $|X| = n$ e $|A| = m$, determinare $|\mathcal{S}_A(X)|$ e $|\mathcal{S}'_A(X)|$.

4. **(6 pt)** Si consideri nell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ l'usuale relazione d'ordine $\leqslant$.

   Nell'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ si consideri la seguente **relazione d'ordine** $\trianglelefteq$:

$$a + ib \trianglelefteq c + id \iff (a + ib = c + id) \vee (|a| < |c|).$$

   Se n è un numero naturale positivo, si denoti con $\mathcal{C}_n$ l'insieme delle radici n-esime dell'unità, cio $\mathcal{C}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$.

   (a) Stabilire se l'insieme ordinato $(\mathbb{C}, \trianglelefteq)$ è totalmente ordinato.

   (b) Rappresentare tramite un diagramma lineare (o di Hasse) $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_4$, $\mathcal{C}_6$ e $\mathcal{C}_8$ con l'ordinamento indotto su di essi da $\trianglelefteq$.

   (c) Trovare, se esistono, elementi massimali, elementi minimali, il massimo ed il minimo di $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_4$, $\mathcal{C}_6$ e $\mathcal{C}_8$ con l'ordinamento indotto su di essi da $\trianglelefteq$.

   (d) Provare che per ogni numero naturale positivo n l'insieme $\mathcal{C}_{2n+1}$ è dotato di massimo ma non di minimo rispetto a $\trianglelefteq$.

5. **(6 pt)** Si considerino i seguenti anelli:

(a) $(\mathbb{Z}_{17}, +, \cdot)$;

(b) $(\mathbb{Z}_{15}, +, \cdot)$;

(c) $(\mathbb{Z}_{11}[X], +, \cdot)$;

(d) $(\mathbb{R}[X], +, \cdot)$;

(e) $\left(\mathbb{Z}_4^{\mathbb{Z}_4} = \{f : \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \mid f \text{ applicazione}\}, +, \cdot\right)$, con $+, \cdot$ definiti nel seguente modo:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$$

$\forall x \in \mathbb{Z}_4,\ \ \forall f, g \in \mathbb{Z}_4^{\mathbb{Z}_4}$.

i) Stabilire quali di essi sono domini d'integritá e quali sono campi.

ii) Per ciascuno degli anelli dati, determinare l'insieme (gruppo) degli elementi invertibili.

6. **(6 pt)**

(a) Decomporre il polinomio $f(X) = 5X^4 - 3X^3 - 17X^2 + 9X + 6 \in \mathbb{Z}[X]$ in fattori irriducibili in $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{Q}[X]$ e $\mathbb{Z}[X]$.

(b) Decomporre il polinomio $g(X) = X^6 + 1 \in \mathbb{Z}[X]$ in fattori irriducibili in $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{Q}[X]$ e $\mathbb{Z}[X]$.

(c) Decomporre il polinomio $h(X) = X^4 + \overline{1} \in \mathbb{Z}_3[X]$ in fattori irriducibili in $\mathbb{Z}_3[X]$.