Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2011/2012
TN410 - Introduzione alla teoria dei numeri
Esercizi 1

1. Provare che se p è un numero primo maggiore di 3 tale che $p+2$ è un numero primo, allora 12 divide $p+(p+2)$.

   (Sugg. $12 = 2^2 \cdot 3$)

2. Provare che se 2 non divide n e 3 non divide n, allora 24 divide n^2+23.

3. Provare che 3 è l'unico numero primo p tale che anche p^2+2 è primo.

4. (a) Verificare che l'insieme $\{0, 1, 2, 2^2, 2^3, \cdots, 2^9\}$ è un sistema completo di residui modulo 11.

   (b) Stabilire se l'insieme $\{0, 1^2, 2^2, 3^2, \cdots, 10^2\}$ è un sistema completo di residui modulo 11.

   (c) Stabilire se l'insieme $\{3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6\}$ è un sistema ridotto di residui modulo 7.

5. Utilizzando il principio di induzione matematica, provare che se m è un intero positivo, allora:

   (a) $4^m \equiv 1 + 3m \pmod 9$;

   (b) $5^m \equiv 1 + 4m \pmod{16}$.

6. (a) Provare che se m è un intero dispari, allora $m^2 \equiv 1 \pmod 8$. Dedurne che la somma dei quadrati di tre numeri interi non è mai congruente a 7 (mod 8).

   (b) Provare che l'equazione $X^2 + Y^2 - 15Z^2 = 7$ non ha soluzioni intere.

7. Provare che le seguenti equazioni diofantee non hanno soluzioni intere:

   (a) $X^3 - X + 1 = 0$

   (b) $X^3 + X^2 - X + 1 = 0$

   (c) $X^3 + X^2 - X + 3 = 0$.

8. Determinare tutte le eventuali soluzioni incongruenti delle seguenti congruenze lineari:

   (a) $7X \equiv 14 \pmod{16}$;

   (b) $3X \equiv 11 \pmod{15}$;

   (c) $10X \equiv 0 \pmod{30}$;

   (d) $8X \equiv 18 \pmod{38}$;

   (e) $7X \equiv 18 \pmod{24}$;

   (f) $12X \equiv 20 \pmod{44}$.

   (g) $10X \equiv 325 \pmod{4115}$.