Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2011/2012
TN410 - Introduzione alla teoria dei numeri
Esercizi 8

1. Stabilire quali dei seguenti numeri interi si possono scrivere come somma di due quadrati:
$$216, \quad 1568, \quad 30685, \quad 11583.$$

2. Scrivere i seguenti numeri primi come somma di due quadrati:
$$53, \quad 137, \quad 241, \quad 421.$$

3. Provare che se $n \equiv 3$ oppure $n \equiv 6 \pmod 9$, allora n non è esprimibile come somma di due quadrati.

4. Un intero positivo si dice *triangolare* se è somma di interi consecutivi a partire da 1.
   (a) Un numero è triangolare se e solo se è della forma $\frac{n(n+1)}{2}$ per qualche $n \geqslant 1$ (Pitagora circa 550 a.C.)
   (b) Un intero m è un numero triangolare se e soltanto se $8m + 1$ è un quadrato perfetto. (Plutarco, circa 100 d.C.)
   (c) La somma di due numeri tiangolari successivi è un quadrato perfetto.(Nicomaco, circa 100 d.C.)
   (d) Se m è un numero triangolare, lo sono anche $9m + 1$, $25m + 3$ e $49m + 6$. (Eulero, 1775)
   (e) Se t_n denota l'n-esimo numero triangolare, allora
   $$t_n = \binom{n+1}{2}.$$
   (f) Provare che :
   $$t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \quad n \geqslant 1$$
   (Aryabhata, circa 500 d.C.).

5. Se n è la somma di due numeri triangolari, allora $4n + 1$ è somma di due quadrati.

6. (a) Sia p un numero primo dispari.
   Provare che se p divide $a^2 + b^2$ con a, b numeri interi coprimi, allora $p \equiv 1 \pmod 4$.
   (Sugg. : si parta da $a^2 \equiv -b^2 \pmod p$ e si cerchi di applicare il piccolo teorema di Fermat per affermare che $(-1)^{\frac{p-1}{2}} = 1$.)

(b) Utilizzando la parte (a), provare che ogni divisore positivo di una somma di due quadrati di interi coprimi è esso stesso la somma di due quadrati.

7. Sia p un numero primo $\equiv 1$ o $3 \pmod 8$.

   (a) Calcolare $\left(\frac{-2}{p}\right)$.

   (b) Provare che l'equazione $X^2 + 2Y^2 = p$ ha soluzioni in $\mathbb{Z}$.

8. Sia $p \geqslant 5$ un numero primo. Provare che l'equazione $3X^2 + Y^2 = p$ ha soluzioni intere se e solo se $p \equiv 1 \bmod (3)$.

   (Sugg.: per $\Longrightarrow$ si consideri $\left(\frac{-3}{p}\right)$; per $\Longleftarrow$ si utilizzi il lemma di Thue.)