Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2010/2011
TN410 - Introduzione alla teoria dei numeri
Tutorato 2 (24 marzo 2011)
Giacomo Milizia

1. Provare che per ogni primo dispari p e per ogni $j \in \mathbb{Z}$ con $0 \leqslant j \leqslant p-1$ si ha:
$$\binom{p-1}{j} \equiv (-1)^j \pmod{\mathrm{p}}.$$

2. Provare che per ogni numero primo p con $n < p \leqslant 2n$ si ha:
$$\binom{2n}{n} \equiv 0 \pmod{p} \quad \text{e} \quad \binom{2n}{n} \not\equiv 0 \pmod{p^2}.$$

3. Utilizzando il piccolo teorema di Fermat, provare che per ogni intero positivo n si ha che $42|n^7 - n$.

4. Provare che se p è un numero primo, allora
$$\binom{2p}{p} \equiv 2 \pmod{p}.$$

5. Usare il teorema di Eulero-Fermat per determinare l'ultima cifra nell'espansione decimale di 3^{1231}.

6. Utilizzando l'esponenziazione modulare, calcolare 9^{83} mod 15 e 11^{35} mod 38.

7. Trovare una soluzione di ciascuna delle seguenti congruenze:
   (a) $X^2 \equiv -1 \pmod{17}$;
   (b) $X^2 \equiv -1 \pmod{53}$.

8. Determinare tutte le soluzioni intere dell'equazione:
$$6X + 7Y - 4Z = 10$$

9. Determinare tutte le (eventuali) soluzioni delle seguenti congruenze polinomiali:
   (a) $X^4 + 1 \equiv 0 \pmod{243}$;
   (b) $X^2 - 12X + 5 \equiv 0 \pmod{243}$;
   (c) $X^3 + 1 \equiv 0 \pmod{28}$;
   (d) $X^3 + 2X^" + 3X + 6 \equiv 0 \pmod{27}$.

10. Determinare tutte le (eventuali) soluzioni della congruenza polinomiale:

$$X^4 + 51X^3 + 35X^2 + 21X + 36 \equiv 0 \pmod{189}.$$

11. Determinare tutte le (eventuali) soluzioni delle seguenti congruenze polinomiali:

    (a) $X^2 + 5X + 4 \equiv 0 \pmod{49}$;

    (b) $X^3 + 4X^2 + 19X + 1 \equiv 0 \pmod{125}$;

    (c) $X^7 + X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 \equiv 0 \pmod{(8)}$;

    (d) $X^{18} + 4X^{14} + 3X + 10 \equiv 0 \pmod{21}$.

12. Determinare il numero di soluzioni della congruenza polinomiale:

$$X^7 + X + 1 \equiv 0 \pmod{343}$$