

Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2010/2011
TN410 - Introduzione alla teoria dei numeri
Seconda prova di valutazione intermedia
31 maggio 2011

*Cognome*_____ *Nome*_____

*Numero di matricola*_____

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e **giustificando tutte le affermazioni fatte**. E' consentito l'uso di libri, appunti e calcolatrici.

1. Si consideri la congruenza quadratica:

$$X^2 \equiv 317 \pmod{3388} \quad (*)$$

- (a) Verificare che la congruenza (*) è risolubile e determinare il numero delle sue soluzioni.
- (b) Trovare le soluzioni della congruenza (*).

2. (a) Calcolare il simbolo di Jacobi $\left(\frac{701}{87395}\right)$, sapendo che 701 e 227 sono numeri primi.
- (b) Stabilire se la congruenza quadratica $X^2 \equiv 701 \pmod{87395}$ è risolubile.

3. (a) Stabilire quali dei seguenti numeri sono somma di due quadrati:
- i. 21125;
 - ii. 829939 (divisibile per 19);
 - iii. 10829 (divisibile per 13 e 17).
- (b) Scrivere i numeri del punto precedente, quando possibile, come somma di due quadrati.

4. Sia p un numero primo dispari; siano k ed m numeri interi tali che $\text{MCD}(m, p) = 1 = \text{MCD}(k, p) = 1$.

Provare che se esistono numeri interi x, y tali che $x^2 - my^2 = kp$, allora $\left(\frac{m}{p}\right) = 1$.

5. (a) Scrivere come frazione continuata $\frac{769}{83}$;
(b) calcolarne tutte le convergenti;
(c) dedurre le soluzioni dell'equazione diofantea $769X - 83Y = 27$.

6. Sia

$$n = p_1^{e_1} \cdot \dots \cdot p_r^{e_r}$$

la fattorizzazione in primi distinti di un numero naturale $n \geq 2$ con $e_i \geq 1$ per $1 \leq i \leq r$.

Si consideri la seguente funzione aritmetica:

$$\omega(n) := \begin{cases} 0 & \text{se } n = 1 \\ r & \text{se } n \geq 2 \end{cases} .$$

- (a) Calcolare $\omega(60)$ e $\omega(125)$; stabilire se ω è moltiplicativa.
- (b) Sia g la funzione aritmetica definita da $g(n) = 2^{\omega(n)}$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$. Verificare che g è moltiplicativa.
- (c) Sia f la funzione aritmetica definita da $f(n) = \sum_{d|n} |\mu(d)|$. Stabilire se f è una funzione moltiplicativa.
- (d) Provare che $g = f$.