Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2009/2010
AL110 - Algebra 1
Tutorato 12 (21 dicembre 2009)
E. Di Gloria - D. Menichetti

1. Stabilire quali dei seguenti polinomi sono irriducibili in $\mathbb{Q}[X]$:
   (a) $f(X) = X^3 + 6X^2 - 9X + 3$
   (b) $g(X) = X^3 + 2X^2 + 2X + 4$.

2. Si considerino i polinomi di $\mathbb{Q}[X]$:
$$f(X) = X^4 - X^3 - 4X^2 + 4X, \quad g(X) = X^2 + \lambda.$$
   (a) Determinare i valori di $\lambda \in \mathbb{Q}$ per i quali $f(X)$ è divisibile per $g(X)$.
   (b) Determinare i valori di $\lambda \in \mathbb{Q}$ per i quali $f(X)$ e $g(X)$ sono primi tra loro.
   (c) Determinare i valori di $\lambda \in \mathbb{Q}$ per i quali $f(X)$ non è divisibile né primo con $g(X)$.

3. Sia
$$h(X) = X^4 + 6X^3 + 12X^2 + 12X + 7 \in \mathbb{Z}[X];$$
   determinare un numero intero α in modo tale che per $h(X - \alpha)$ si possa applicare il criterio di Eisenstein.

4. Decomporre i seguenti polinomi in fattori irriducibili in $\mathbb{Z}[X]$:
   (a) $f(X) = X^4 - 4X^2 + 2X - 1$
   (b) $g(X) = 3X^4 - 7X^3 - 13X^2 + 35X - 10$.

5. Sia $\theta = \frac{2\pi}{5}$.
   (a) Verificare che $\cos 2\theta + \cos \frac{\theta}{2} = 0$.
   (b) Provare che $\cos\theta$ è una radice del polinomio
$$2(4X^4 - 4X^2 + 1) - X - 1.$$
   (c) Decomporre in fattori irriducibili in $\mathbb{Z}[X]$ il polinomio
$$8X^4 - 8X^2 - X + 1$$
   e dedurne che $\cos\theta$ è una radice di un polinomio di secondo grado a coefficienti in $\mathbb{Z}$.
   (d) Determinare $\cos\theta$.

6. Nell'anello $\mathbb{Z}_7[X]$ si considerino i polinomi $f(X) = X^4 + \overline{3}X^3 - \overline{2}X^2 - \overline{2}X + \overline{4}$ e $g(X) = X^2 + \overline{2}X + \overline{4}$.

   (a) Decomporre $f(X)$ e $g(X)$ in fattori irriducibili in $\mathbb{Z}_7[X]$.

   (b) Trovare il $\mathrm{MCD}(f(X), g(X))$.

7. Decomporre i seguenti polinomi in fattori irriducibili:

   (a) $f(X) = X^4 + 4$ rispettivamente in $\mathbb{Z}[X]$, $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$;

   (b) $g(X) = X^3 - \overline{2}X^2 - \overline{5}X + \overline{2}$ in $\mathbb{Z}_7[X]$;

   (c) $h(X) = X^4 + \overline{2}X^3 + \overline{2}X - \overline{1}$ in $\mathbb{Z}_3[X]$.

8. Provare che il polinomio $X^3 + 17X + 36 \in \mathbb{Z}[X]$ è irriducibile in $\mathbb{Q}[X]$ applicando il criterio di irriducibilità mod p per un opportuno numero primo p.