Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2009/2010
AL110 - Algebra 1
Prima prova di valutazione intermedia
5 novembre 2009

*Cognome*___________________ *Nome*_______________________

*Numero di matricola*__________________

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e **giustificando tutte le affermazioni fatte**. Non è consentito l'uso di libri, appunti. E' consentito l'uso della calcolatrice.

1. (a) Utilizzando il principio di induzione si dimostri che per ogni numero naturale $n \geq 1$ si ha :

$$7 \mid 3^{2n+1} + 2^{n+2}$$

(b) Siano i numeri a_n definiti da $a_1 = 11$, $a_2 = 21$, e $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ per $n \geqslant 3$. Utilizzando il principio di induzione forte, provare che per ogni numero naturale $n \geqslant 1$ si ha:

$$a_n = 5 \cdot 2^n + 1$$

Soluzione

(a) Base dell'induzione: per $n = 1$ si ha $3^3 + 2^3 = 35 = 7 \cdot 5$.
Passo induttivo; sia $n \geqslant 1$ e supponiamo che $7 \mid 3^{2n+1} + 2^{n+2}$. Consideriamo $3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2}$; si ha che
$3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} = 3^{2n+1} \cdot 3^2 + 2^{n+2} \cdot 2 = 3^{2n+1} \cdot (7+2) + 2^{n+2} \cdot 2 = 3^{2n+1} \cdot 7 + 3^{2n+1} \cdot 2 + 2^{n+2} \cdot 2 = 3^{2n+1} \cdot 7 + 2 \cdot (3^{2n+1} + 2^{n+2})$;
poiché, per l'ipotesi induttiva $7 \mid 3^{2n+1} + 2^{n+2}$, si ha che $7 \mid 3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2}$.

(b) Base dell'induzione: per $n = 1$ si ha $5 \cdot 2^1 + 1 = 11 = a_1$; per $n = 2$ si ha $5 \cdot 2^2 + 1 = 21 = a_2$; per $n = 3$ si ha $5 \cdot 2^3 + 1 = 41 = 3 \cdot 21 - 2 \cdot 11 = a_3$.

Passo induttivo: sia $n \geqslant 3$ e supponiamo che per ogni intero positivo $k \leqslant n$ si abbia $a_k = 5 \cdot 2^k + 1$; allora

$$a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1} = 3\cdot(5\cdot 2^n + 1) - 2(5\cdot 2^{n-1} + 1) = 3\cdot 5\cdot 2^n + 3 - 5\cdot 2^n - 2 = 5\cdot 2^{n+1} + 1$$

2. Siano $X = \{a, b, c\}$ ed $Y = \{1, 2\}$. Sia

$$S := \{(X_i, f_i) : \emptyset \neq X_i \subseteq X \text{ e } f_i : X_i \to Y \text{ applicazione}\}.$$

Si definisca su S la seguente relazione ρ:

$$(X_i, f_i)\rho(X_k, f_k) :\Longleftrightarrow X_i \subseteq X_k, \quad \text{e} \quad f_{k|_{X_i}} = f_i.$$

(a) Dimostrare che ρ è una relazione d'ordine.

(b) Determinare gli eventuali elementi massimali, minimali, massimo e minimo di S rispetto a ρ.

Soluzione

X ha 3 sottoinsiemi che hanno un solo elemento e per ciascuno di essi ci sono 2 applicazioni di codominio Y; X ha 3 sottoinsiemi che hanno due elementi e per ciascuno di essi ci sono 4 applicazioni di codominio Y; ci sono inoltre 8 applicazioni di dominio X e codominio Y; S ha pertanto 26 elementi.

(a) ρ gode delle seguenti proprietà:

i. riflessiva:
per ogni $(X_i, f_i) \in S$ si ha che $(X_i, f_i)\rho(X_i, f_i)$ poiché $X_i = X_i$ e $f_{i|_{X_i}} = f_i$.

ii. antisimmetrica:
siano (X_i, f_i), $(X_k, f_k) \in S$ tali che $(X_i, f_i)\rho(X_k, f_k)$ e $(X_k, f_k)\rho(X_i, f_i)$; allora $X_i \subseteq X_k$, $f_{k|_{X_i}} = f_i$, $X_k \subseteq X_i$ e $f_{i|_{X_k}} = f_k$; da $X_i \subseteq X_k$ e $X_k \subseteq X_i$ segue che $X_i = X_k$; inoltre da $f_{k|_{X_i}} = f_i$, essendo $X_i = X_k$, segue che $f_k = f_i$; pertanto $(X_i, f_i) = (X_k, f_k)$.

iii. transitiva :
siano (X_i, f_i), (X_k, f_k), $(X_j, f_j) \in S$ tali che $(X_i, f_i)\rho(X_k, f_k)$ e $(X_k, f_k)\rho(X_j, f_j)$; allora $X_i \subseteq X_k$, $f_{k|_{X_i}} = f_i$, $X_k \subseteq X_j$ e $f_{j|_{X_k}} = f_k$; da $X_i \subseteq X_k$ e $X_k \subseteq X_j$ segue che $X_i \subseteq X_j$; inoltre $f_{j|_{X_i}} = \left(f_{j|_{X_k}}\right)_{|_{X_i}} = f_{k|_{X_i}} = f_i$.

Abbiamo così verificato che ρ è una relazione d'ordine in S.

(b) Sia $\overline{X}$ uno qualunque dei tre sottoinsieni di X con un solo elemento e sia $\overline{f}$ una delle due applicazioni da $\overline{X}$ a Y; la coppia $(\overline{X}, \overline{f})$ gode della seguente proprietà:

sia $(X_i, f_i) \in S$ tale che $(X_i, f_i)\rho(\overline{X}, \overline{f})$; allora $X_i \subseteq \overline{X}$ e $\overline{f}_{|X_i} = f_i$; essendo $\overline{X}$ costituito da un solo elemento e $X_i \neq \emptyset$, si ha che $X_i = \overline{X}$ e $\overline{f} = f_i$.

Pertanto $(\overline{X}, \overline{f})$ è un elemento minimale e lo stesso vale per tutti gli altri elementi di S costituiti da un sottoinsieme di X con un solo elemento e da una qualunque aplicazione da esso a Y. Ci sono pertanto 6 elementi minimali di questo tipo.

Analogamente si dimostra che ogni coppia (X, f) dove f è una qualunque applicazione da X a Y è un elemento massimale. Ci sono pertanto 8 elementi massimali di questo tipo.

Sia $(X_i, f_i) \in S$ con $X_i = \{x_{i_1}, x_{i_2}\}$ costituito da due elementi; allora $(\{x_{i_1}\}, g)$ con g applicazione da $\{x_{i_1}\}$ a Y definita da $g(x_{i_1}) = f_i(x_{i_1})$ è tale che $(\{x_{i_1}\}, g)\rho(X_i, f_i)$ e $(\{x_{i_1}\}, g) \neq (X_i, f_i)$; da ciò segue che $(X_i, f_i) \in S$ non è minimale. Inoltre (X, ψ) con ψ applicazione da X a Y definita da $\psi(x_{i_1}) = f_i(x_{i_1})$, $\psi(x_{i_2}) = f_i(x_{i_2})$ e $\psi(x_{i_3}) = 1$ con $\{x_{i_3}\} = X - X_i$ è tale che $(X_i, f_i)\rho(X, \psi)$ e $(X_i, f_i) \neq (X, \psi)$; da ciò segue che $(X_i, f_i) \in S$ non è massimale.

In conclusione vi sono esattamente 6 elementi minimali ed 8 elementi massimali.

3. Per il teorema fondamentale dell'aritmetica per ogni numero naturale positivo n esistono e sono unici $\alpha, h \in \mathbb{N}$ tali che $n = 7^\alpha h$ e $\mathrm{MCD}(7, h) = 1$. Si consideri in $\mathbb{N}_+$ la seguente relazione R:

$$(7^\alpha h)R(7^\beta k) :\Longleftrightarrow \alpha = \beta$$

   (a) Verificare che R è una relazione d'equivalenza in $\mathbb{N}_+$.
   (b) Determinare $[4]_R$ e $[147]_R$.
   (c) Determinare la partizione di $\mathbb{N}_+$ associata alla relazione R.
   (d) Trovare una applicazione g di dominio $\mathbb{N}_+$ tale che la relazione nucleo di g coincide con R.

Soluzione

Siano $n, m, s \in \mathbb{N}_+$; allora sono univocamente determinati $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$ e $h, k, t \in N_+$ tali che $n = 7^\alpha h$ con $\mathrm{MCD}(7, h) = 1$, $m = 7^\beta k$ con $\mathrm{MCD}(7, k) = 1$ e $s = 7^\gamma t$ con $\mathrm{MCD}(7, t) = 1$.

   (a) R gode delle seguenti proprietà:
      i. riflessiva:
      per ogni $n \in \mathbb{N}_+$, $n = 7^\alpha h$ e $\mathrm{MCD}(7, h) = 1$, si ha che $(7^\alpha h)R(7^\alpha h)$ poiché $\alpha = \alpha$;

ii. simmetrica
siano $n = 7^\alpha h$ con $\mathrm{MCD}(7, h) = 1$ e $m = 7^\beta k$ con $\mathrm{MCD}(7, k) = 1$ tali che nRm, cioè $(7^\alpha h)R(7^\beta k)$; allora $\alpha = \beta$ da cui segue che $\beta = \alpha$; pertanto $(7^\beta k)R(7^\alpha h)$, cioè mRn;

iii. transitiva
siano $n = 7^\alpha h$ con $\mathrm{MCD}(7, h) = 1$, $m = 7^\beta k$ con $\mathrm{MCD}(7, k) = 1$ e $s = 7^\gamma t$ con $\mathrm{MCD}(7, t) = 1$ tali che nRm e mRs , cioè $(7^\alpha h)R(7^\beta k)$ e $(7^\beta k)R(7\gamma t)$; allora $\alpha = \beta$ e $\beta = \gamma$; poiché l'uguaglianza gode della proprietà transitiva, si ha che $\alpha = \gamma$ da cui nRs.

(b) $4 = 7^0 4$ e $147 = 7^2 3$.

$$[4]_R = \{n \in N_+ \quad | \quad n = 7^\alpha h \text{ con } \mathrm{MCD}(7, h) = 1 \text{ e } (7^\alpha h)R(7^0 4)\}$$

da cui

$$[4]_R = \{h \in N_+ \quad | \quad \mathrm{MCD}(7, h) = 1\} = \left[11^0\right]_R$$

$$[147]_R = \{n \in N_+ \quad | \quad n = 7^\alpha h \text{ con } \mathrm{MCD}(7, h) = 1 \text{ e } (7^\alpha h)R(7^2 3)\}$$

da cui

$$[147]_R = \{n \in N_+ \quad | \quad n = 7^2 h \text{ con } \mathrm{MCD}(7, h) = 1\} = \left[11^2\right]_R$$

(c) La partizione di $\mathbb{N}_+$ associata alla relazione R è data dalle classi di equivalenza di R distinte. Per ogni $\alpha \in N$ si ha che

$$[11^\alpha]_R = \{n \in N_+ \quad | \quad 11^\alpha | n \text{ e } 11^{\alpha+1} \text{ non divide } n\}$$

Al variare di $\alpha \in N$ si hanno tutte le classi d'equivalenza di R e se $\alpha \neq \beta$ anche $[11^\alpha]_R \neq \left[11^\beta\right]_R$: pertanto la partizione di $\mathbb{N}_+$ associata alla relazione R è

$$N_+ = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{N}} [11^\alpha]_R$$

(d) Sia $g : \mathbb{N}_+ \longrightarrow \mathbb{N}$ l'applicazione definita da :
per $n = 7^\alpha h$ con $\mathrm{MCD}(7, h) = 1$

$$g(n) = \alpha$$

Allora se $m = 7^\beta h$ con $\mathrm{MCD}(7, h) = 1$, si ha che

$$n\rho_g m \Longleftrightarrow \alpha = \beta \Longleftrightarrow nRm$$

4. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'applicazione definita da:

$$x \longmapsto \begin{cases} x^3 & \text{se } |x| \leqslant 5 \\ [x] & \text{se } |x| > 5 \end{cases}$$

con $[x]$ parte intera di x (cioè il più grande intero minore od uguale ad x).

(a) Stabilire se l'applicazione f è iniettiva.

(b) Descrivere $\mathtt{Im}(f)$.

(c) Sia ρ_f la relazione nucleo di f. Descrivere $[3]_{\rho_f}$ e $[\frac{1}{3}]_{\rho_f}$.

Soluzione

(a) f non è iniettiva poiché esistono elementi di $\mathbb{R}$ distinti x, x' tali che $f(x) = f(x')$, ad esempio $f(3) = 27 = f(27)$.

(b) Se $|x| \leqslant 5$, allora $f(x) \in [-125, 125]$; se $x > 5$, allora $f(x) \in \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geqslant 5\}$;
se $x < -5$, allora $f(x) \in \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leqslant -6\}$; pertanto
$\mathtt{Im}(f) \subseteq [-125, 125] \cup \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geqslant 126\} \cup \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leqslant -126\}$.
Inoltre per ogni $y \in [-125, 125]$ si ha che $\sqrt[3]{y} \in [-5, 5]$ e$f(\sqrt[3]{y}) = y$; per ogni $n \in \mathbb{Z}$ con $n \geqslant 126$ si ha che $f(n) = n$ ed analogamente per ogni $n \in \mathbb{Z}$ con $n \leqslant -126$.
In conclusione

$$\mathtt{Im}(f) = [-125, 125] \cup \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geqslant 126\} \cup \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leqslant -126\}$$

(c) $[3]_{\rho_f} = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = f(3)\} = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 27\} = \{3\} \cup [27, 28)$
$[\frac{1}{3}]_{\rho_f} = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = f(\frac{1}{3})\} = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = \frac{1}{27}\} = \{\frac{1}{3}\}$

5. Trovare le radici ottave di 16.

Soluzione

$16 = 16(\cos 0 + i \sin 0)$; pertanto le radici ottave di 16 si ottengono da $\sqrt[8]{16}\left(\cos \frac{2k\pi}{8} + i \sin \frac{2k\pi}{8}\right)$ con $0 \leqslant k \leqslant 7$;

per $k = 0$ si ha $\alpha_0 = \sqrt{2}(\cos 0 + i \sin 0) = \sqrt{2}$;

per $k = 1$ si ha $\alpha_1 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{2\pi}{8} + i \sin \frac{2\pi}{8}\right) = 1 + i$;

per $k = 2$ si ha $\alpha_2 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{4\pi}{8} + i \sin \frac{4\pi}{8}\right) = \sqrt{2}i$;

per $k = 3$ si ha $\alpha_3 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{6\pi}{8} + i \sin \frac{6\pi}{8}\right) = -1 + i$;

per $k = 4$ si ha $\alpha_4 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{8\pi}{8} + i \sin \frac{8\pi}{8}\right) = -\sqrt{2}$;

per $k = 5$ si ha $\alpha_5 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{10\pi}{8} + i \sin \frac{10\pi}{8}\right) = -1 - i$;

per $k = 6$ si ha $\alpha_6 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{12\pi}{8} + i \sin \frac{12\pi}{8}\right) = -\sqrt{2}i$;

per $k = 7$ si ha $\alpha_7 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{14\pi}{8} + i \sin \frac{14\pi}{8}\right) = 1 - i$.

6. Siano a, b numeri interi non entrambi nulli. Provare che se MCD(a, b)=1, allora MCD$(a + b, ab)$=1

   Soluzione

   E' noto che se $x, y, z \in \mathbb{Z}$ sono tali che MCD$(x, y) = 1$ e MCD$(x, z) = 1$, allora MCD$(x, yz) = 1$ (esercizio del tutorato).

   Essendo MCD(a, b)=1, si ha MCD$(a + b, a)$=1: sia d' un divisore positivo di $a + b$ e di a, allora d' è anche un divisore positivo b da cui, essendo MCD(a, b)=1, si ha che $d' = 1$.

   Analogamente si verifica che MCD$(a+b, b)$=1; applicando il risultato sopra ricordato si ha che MCD$(a + b, ab)$=1.

   Oppure si supponga che MCD$(a + b, ab) = d > 1$; allora per il teorema fondamentale dell'aritmetica, esiste un numero primo p che divide d; essendo d un divisore comune di a e di b, si ha che p divide sia $a + b$ che ab; poiché p divide ab e p è primo, si ha che p divide a oppure p divide b; se p divide a, dividendo p anche $a + b$, p divide anche b e pertanto p divide anche MCD(a, b)=1, che è assurdo. Si può pertanto concludere che MCD$(a + b, ab)$=1.