Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2009/2010
AL110 - Algebra 1
Esercizi 5 (30 ottobre 2009)

Esercizio 1. Per ogni $z \in \mathbb{Z}$ si scriva $z = 2^\alpha y$ con y dispari. Si consideri su $\mathbb{Z}$ la seguente relazione:

$$z \rho z' \iff \alpha = \beta,$$

dove $z' = 2^\beta y'$.

Dimostrare che ρ è una relazione d'equivalenza e descriverne l'insieme quoziente.

Esercizio 2. Calcolare il massimo comune divisore tra 105 e 39 e due identità di Bézout.

Esercizio 3. Sia $X := \{a, b, c, d\}$. Per ciascuna delle seguenti relazioni stabilire se sono riflessive, simmetriche, antisimmetriche, transitive:

$$\begin{aligned} R_1 &:= \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(a,c)\}, \\ R_2 &:= \{(a,b),(b,c),(a,c)\}, \\ R_3 &:= \{(a,b),(b,a),(c,c)\}. \end{aligned}$$

Esercizio 4. Si consideri sull'insieme dei numeri naturali positivi $\mathbb{N}^>$ la seguente relazione:

$$a \rho b :\iff \frac{a}{b} \in \mathbb{N}.$$

Dimostrare che ρ è una relazione d'ordine e stabilire se è totale. Stabilire se $\mathbb{N}^>$ abbia massimo e/o minimo rispetto a ρ.

Esercizio 5. Sia

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } |x| \geq 3 \\ 2 & \text{se } |x| < 3 \end{cases} \end{aligned}$$

(a) Dimostrare che l'applicazione f non è iniettiva né suriettiva.

(b) Descrivere $\mathrm{Im}(f)$.

(c) Descrivere le classi d'equivalenza della relazione nucleo ρ_f e l'insieme quoziente $\mathbb{Z}/\rho_f$.

Esercizio 6. Sia data la successione ricorsiva:

$$a_0 := 1,\ a_1 := 1,\ a_n := a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}.$$

Utilizzando il principio di induzione, trovare una formula chiusa per definire a_n in funzione di n.

Esercizio 7. Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \Im(z)$.

(a) Stabilire se f è iniettiva e/o suriettiva e calcolarne l'immagine.

(b) Descrivere l'insieme quoziente della relazione nucleo ρ_f.

Esercizio 8. Sia φ la funzione di Eulero. Si dimostri che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$:

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d).$$

Esercizio 9. Si stabilisca se i seguenti interi sono o meno invertibili modulo 35 ed in caso affermativo trovarne l'inverso:

$$91, \quad 47, \quad 122, \quad 174, \quad 297.$$