Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2009/2010
AL110 - Algebra 1
Esercizi 1 (25 settembre 2009)

Esercizio 1. Sia X un insieme e siano A, B sottoinsiemi di X. Dimostrare che valgono le seguenti uguaglianze:

(a) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$.

(b) $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$.

Esercizio 2. Dimostrare che, dati comunque tre insiemi A, B, C:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Esercizio 3. Sia X un insieme e siano A, B sottoinsiemi di X. La *differenza simmetrica di A e B* è il sottoinsieme di X così definito:

$$A\Delta B := (A \cap (X \setminus B)) \cup (B \cap (X \setminus A)).$$

Dimostrare che $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Esercizio 4. Sia $(\mathbb{N}, s, 0)$ la terna costituita dall'insieme dei numeri naturali, la funzione successore e lo zero. Sia $k \in \mathbb{N}$ e si consideri l'insieme:

$$E_k := \{n \in \mathbb{N} : n \geq k\}.$$

Mostrare che la terna (E, σ, k), dove per ogni $n \in E$, $\sigma(n) := s(n)$, è un sistema di Peano equivalente ad $(\mathbb{N}, s, 0)$.

Esercizio 5. Dimostrare per induzione le seguenti, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$:

(a) $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

(b) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(c) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$

(d) $n! \geq 2^{n-1}$

Esercizio 6. Trovare l'errore nella seguente dimostrazione per induzione.

Tutte le monete hanno lo stesso valore.

Per induzione sul numero n di monete. Ovvero facciamo vedere che comunque preso un insieme composto da $n \geq 1$ monete, queste hanno tutte lo stesso valore:

- **Base dell'induzione:** tutti gli insiemi con una sola moneta sono chiaramente composti da monete dello stesso valore.

- **Ipotesi induttiva:** supponiamo che tutti gli insiemi da $n-1$ monete siano composti da monete dello stesso valore.

- **Passo induttivo:** consideriamo un insieme di n monete $\{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$. Per l'ipotesi induttiva tutte le monete $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ hanno lo stesso valore. Applicando ora l'ipotesi induttiva alle monete $M_2, \ldots, M_n$ possiamo dedurre che anche queste hanno tutte il medesimo valore, che necessariamente deve essere quello di M_2. Pertanto tutte le monete $M_1, \ldots, M_n$ hanno lo stesso valore.