Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2009/2010
AL110 - Algebra 1
Appello A
26 Gennaio 2010

*Cognome*____________________ *Nome*_________________________

*Numero di matricola*___________________

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e **giustificando tutte le affermazioni fatte**. Non è consentito l'uso di libri, appunti. E' consentito l'uso della calcolatrice.

1. (a) Utilizzando il principio di induzione si dimostri che per ogni numero naturale $n \geq 1$ si ha :

$$21 \mid 4^{n+1} + 5^{2n-1}$$

(b) Siano i numeri s_n definiti da $s_1 = 1$ e $s_n = s_{n-1} + (3n-2)$ per $n \geqslant 2$.

i. Utilizzando il principio di induzione, provare che per ogni numero naturale $n \geqslant 1$ si ha:

$$s_n = \frac{n(3n-1)}{2}$$

ii. Provare che per ogni numero naturale $n \geqslant 2$ si ha:

$$s_n = \binom{n}{2} + n^2$$

2. Sia data la seguente applicazione:

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \cos(2\pi x) + i\sin(2\pi x) \end{array}$$

   (a) Stabilire se l'applicazione f è iniettiva.

   (b) Determinare l'immagine di f.

   (c) Descrivere la relazione nucleo ρ_f.

   (d) Descrivere le classi d'equivalenza $[x]_{\rho_f}$.

3. Sia $X = \{n \in \mathbb{N} \ \mid \ n \geqslant 5\}$. Nel prodotto cartesiano $X \times X$ si consideri la seguente relazione:

$$(a,b)\theta(c,d) :\Longleftrightarrow a \text{ divide } c \text{ in } \mathbb{N} \text{ e } b \leqslant d$$

con $a, b, c, d \in X$.

(a) Verificare che θ è una relazione d'ordine in $X \times X$.

(b) Stabilire se l'insieme ordinato $(X \times X, \theta)$ è ordinato totalmente.

(c) Determinare gli eventuali elementi minimali di $(X \times X, \theta)$.

(d) Determinare gli eventuali elementi massimali di $(X \times X, \theta)$.

(e) **(FAC.)** Si consideri il seguente sottoinsieme di $X \times X$:

$$A = \{(14,6),\ (21,20),\ (105,10)\}$$

Stabilire se esiste l'estremo inferiore e l'estremo superiore di A in $(X \times X, \theta)$.

*Cognome*___________________ *Nome*________________________

*Numero di matricola*___________________

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e **giustificando tutte le affermazioni fatte**. Non è consentito l'uso di libri, appunti. E' consentito l'uso della calcolatrice.

4. Trovare l'ordine del sottogruppo del gruppo dato generato dall'elemento assegnato::
   (a) il sottogruppo di $\mathbb{Z}_{36}$ generato da $[4]_{36}$;
   (b) il sottogruppo di $\mathcal{C}_9$ generato da $\cos\frac{8\pi}{9} + i\sin\frac{8\pi}{9}$
   (c) il sottogruppo di S_9 generato da $(372)\circ(1987)\circ(56)\circ(6291)$;
   (d) il sottogruppo del gruppo delle biiezioni di $\mathbb{R}^2$ in se stesso generato dalla biiezione f definita da $f((x,y)) = (-x, 3+y)$, per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$;
   (e) il sottogruppo del gruppo additivo delle matrici quadrate a coefficienti in $\mathbb{Z}_{12}$ generato da $\begin{pmatrix} [3]_{12} & [2]_{12} \\ [2]_{12} & [6]_{12} \end{pmatrix}$.

5. Si consideri il seguente sottoinsieme del campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali:

$$A = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \quad | \quad a,\ b \in \mathbb{Z} \ \text{ e } \ 7 \ \text{ non divide } \ b \right\}$$

(a) Verificare che A è un sottoanello di $\mathbb{Q}$.

(b) Stabilire se A è un dominio d'integritá.

(c) Stabilire se A è un campo.

(d) Caratterizzare gli elementi invertibili di A.

(e) Sia I l'insieme degli elementi non invertibili di A, cioè $I = A - U(A)$.
Verificare che:

i. se $\frac{x}{y}$, $\frac{z}{t} \in I$, allora $\frac{x}{y} - \frac{z}{t} \in I$;

ii. se $\frac{a}{b} \in A$, $\frac{x}{y} \in I$, allora $\frac{a}{b}\frac{x}{y} \in I$.

6. (a) Sia $f(X) = 10X^5 - 20X^4 + 20X^3 + 20X^2 - 40X + 40 \in \mathbb{Z}[X]$.

   i. Verificare che $1 + i$ è radice di $f(X)$.

   ii. Decomporre $f(X)$ in fattori irriducibili in $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{Q}[X]$ e $\mathbb{Z}[X]$.

   (b) Decomporre il polinomio $X^4 + 1 \in \mathbb{Z}_3[X]$ in fattori irriducibili in $\mathbb{Z}_3[X]$.

   (c) Utizzando il criterio di Eisenstein, dimostrare che il polinomio $f(X) = X^4 - X^3 + X^2 - X + 1 \in \mathbb{Z}[X]$ è irriducibile in $\mathbb{Z}[X]$.