

Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2007/2008
TN1 - Introduzione alla teoria dei numeri
Tutorato 9 (28 maggio 2009)
Giacomo Milizia

1. Stabilire quali dei seguenti numeri interi si possono scrivere come somma di due quadrati:

$$216, 1568, 30685, 11583.$$

2. Scrivere i seguenti numeri primi come somma di due quadrati:

$$53, 137, 241, 421.$$

3. Provare che se $n \equiv 3$ oppure $n \equiv 6 \pmod{9}$, allora n non è esprimibile come somma di due quadrati.

4. Scrivere ciascuno dei seguenti numeri interi come somma di quattro quadrati:

$$165 = 3 \cdot 5 \cdot 11, \quad 247 = 13 \cdot 19, \quad 1147 = 31 \cdot 37.$$

5. Un intero positivo si dice *triangolare* se è somma di interi consecutivi a partire da 1.

- (a) Un numero è triangolare se e solo se è della forma $\frac{n(n+1)}{2}$ per qualche $n \geq 1$ (Pitagora circa 550 a.C.)
- (b) Un intero m è un numero triangolare se e soltanto se $8m + 1$ è un quadrato perfetto. (Plutarco, circa 100 d.C.)
- (c) La somma di due numeri triangolari successivi è un quadrato perfetto. (Nicomaco, circa 100 d.C.)
- (d) Se m è un numero triangolare, lo sono anche $9m + 1$, $25m + 3$ e $49m + 6$. (Eulero, 1775)
- (e) Se t_n denota l' n -esimo numero triangolare, allora

$$t_n = \binom{n+1}{2}.$$

- (f) Provare che :

$$t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \quad n \geq 1$$

(Aryabhata, circa 500 d.C.).

6. Se n è la somma di due numeri triangolari, allora $4n + 1$ è somma di due quadrati.

7. (a) Sia p un numero primo dispari.
Provare che se p divide $a^2 + b^2$ con a, b numeri interi coprimi, allora $p \equiv 1 \pmod{4}$.
- (b) Utilizzando la parte (a), provare che ogni divisore positivo di una somma di due quadrati di interi coprimi è esso stesso la somma di due quadrati.