Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2008/200912
TN1 - Introduzione alla teoria dei numeri
Tutorato 2 (12 marzo 2009)
Giacomo Milizia

1. Provare che per ogni primo dispari p e per ogni $j \in \mathbb{Z}$ con $0 \leqslant j \leqslant p-1$ si ha:
$$\binom{p-1}{j} \equiv (-1)^j \pmod{\text{p}}.$$

2. Provare che per ogni numero primo p con $n < p \leqslant 2n$ si ha:
$$\binom{2n}{n} \equiv 0 \pmod{p} \quad \text{e} \quad \binom{2n}{n} \not\equiv 0 \pmod{p^2}.$$

3. Verificare che 45 è uno pseudoprimo in base 17 e 19.

4. Utilizzando il piccolo teorema di Fermat, provare che per ogni intero positivo n si ha che $42 | n^7 - n$.

5. Provare che se p è un numero primo, allora
$$\binom{2p}{p} \equiv 2 \pmod{p}.$$

6. Usare il teorema di Eulero-Fermat per determinare l'ultima cifra nell'espansione decimale di 7^{1000}.

7. Calcolare 5^{43} mod 79 e 10^{33} mod 41.

8. Determinare tutte le eventuali soluzioni dei seguenti sistemi di congruenze lineari:
$$\begin{cases} 7X \equiv 2 \pmod{10} \\ 2X \equiv 9 \pmod{11} \\ 5X \equiv 4 \pmod{7} \end{cases}$$
$$\begin{cases} 3X \equiv 6 \pmod{15} \\ 10X \equiv 6 \pmod{14} \\ 3X \equiv 5 \pmod{11} \\ 3X \equiv 6 \pmod{13} \end{cases}$$

9. Trovare una soluzione di ciascuna delle seguenti congruenze:
   (a) $X^2 \equiv -1 \pmod{37}$;
   (b) $X^2 \equiv -1 \pmod{89}$.

10. Determinare tutte le soluzioni intere dell'equazione:

$$6X + 7Y - 4Z = 10$$

11. Trovare le soluzioni di ciascuno dei seguenti sistemi di congruenze lineari:

$$\begin{cases} 7X + 2Y \equiv 2 \pmod{11} \\ 2X + 3Y \equiv 5 \pmod{11} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X + 2Y \equiv 1 \pmod{5} \\ 2X + Y \equiv 1 \pmod{5} \end{cases}$$