Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2008/2009
TN1 - Introduzione alla teoria dei numeri
Seconda prova di valutazione intermedia
4 giugno 2009

*Cognome*____________________ *Nome*__________________________

*Numero di matricola*____________________

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e **giustificando tutte le affermazioni fatte**. E' consentito l'uso di libri, appunti e calcolatrici.

1. Si consideri la congruenza quadratica:

$$X^2 \equiv 825 \pmod{4624} \qquad (*)$$

   (a) Verificare che la congruenza $(*)$ è risolubile e deterrminare il numero delle sue soluzioni.

   (b) Trovare le soluzioni della congruenza $(*)$.

2. (a) Calcolare il simbolo di Jacobi $\left(\frac{509}{32901}\right)$, sapendo che 509 e 997 sono numeri primi.

   (b) Stabilire se la congruenza quadratica $X^2 \equiv 509 \bmod(32901)$ è risolubile.

3. (a) Stabilire quali dei seguenti numeri sono somma di due quadrati:
    i. 605;
    ii. 424589 (divisibile per 11 e 29);
    iii. 841639 (divisibile per 23, 37, 43).
   (b) Scrivere i numeri del punto precedente, quando possibile, come somma di due quadrati.

4. Sia $p \geqslant 5$ un numero primo. Provare che l'equazione $3X^2 + Y^2 = p$ ha soluzioni intere se e solo se $p \equiv 1 \bmod (3)$.

   (Sugg.: per $\Longrightarrow$ si consideri $\left(\frac{-3}{p}\right)$; per $\Longleftarrow$ si utilizzi il lemma di Thue.)

*Cognome*__________________ *Nome*_______________________

*Numero di matricola*__________________

5. **(a)** Scrivere come frazione continuata $\frac{253}{436}$;
   (b) calcolarne tutte le convergenti;
   (c) dedurre le soluzioni dell'equazione diofantea $253X + 436Y = 2$.

6. Sia Λ la funzione di *von Mangoldt*, definita nel modo seguente:

$$\Lambda(n) := \begin{cases} \log(p) & \text{se } n = p^h,\ p \text{ numero primo },\ h \geq 1 \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} .$$

Dimostrare che:

(a) $\log(n) = \sum_{d|n} \Lambda(d)$;

(b) $\Lambda(n) = \sum_{d|n} \left(\mu(d) \log\left(\frac{n}{d}\right)\right) = -\sum_{d|n} \left(\mu(d) \log(d)\right)$.